1 р. 10 к.

ВГУ

С. Г. Крейн, Н. И. Яцкин

Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях

С. Г. КРЕЙН, В. И. ЯЦКИН

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ

ВОРОНЕЖ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ВОРОНЕЖСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1980

УДК 513.6

Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. Крейн С.Г., Яцкин Н.И. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1980. 132 с.

В монографии изучаются линейные дифференциальные уравнения на многообразиях с коэффициентами, принадлежащими алгебре Ли. Исследуются вопросы существования и единственности решений таких уравнений, а также свойства решений. Для вполне интегрируемых уравнений рассматривается важное отношение эквивалентности, связанное с линейной заменой неизвестной. Строится теория, включающая и обобщающая классические результаты типа теорем Ляпунова-Флоке о приводимости к постоянным коэффициентам и Перрона – о приводимости к треугольному виду.

Издание рассчитано на студентов, аспирантов и преподавателей математических факультетов.

Библ. ссылок 41.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Воронежского университета.

Научный редактор – канд. физ.-мат. наук доц. П.А.Кучмент

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук проф. А.И.Перов
канд. физ.-мат. наук доц. В.И.Кононенко

$К\frac{20203-015}{М174(03)-80}$29-80

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы появилась обширная литература, посвященная изложению на языке современной дифференциальной геометрии и топологии вопросов математического анализа на гладких многообразиях [I-5, 8-9, I4-I6, 2I, 27, 3I] , а также получили дальнейшее развитие дисциплины, опирающиеся на математический анализ. В частности, был переосмыслен ряд классических результатов в теории дифференциальных уравнений, аналитической механике и теоретической физике. Однако освещение этих вопросов в монографической и учебной литературе является пока недостаточным.

Авторы поставили перед собой задачу изложить в связной и замкнутой форме основные вопросы теории линейных дифференциальных уравнений на многообразиях. Для облегчения восприятия материала во введении приводятся (без доказательства) те факты математического анализа на многообразиях, которые необходимы для понимания основного текста книги. Подробное изложение этого материала читатель может найти в книгах [3, 4, I8, 2I, 27, 3I] - дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы на них; [I6, 22, 30, 32] - группы и алгебры Ли; [3, 9, I4, I9, 22, 27, 30, 34] - дифференциальная геометрия и, в частности, теория связностей; [4, 8, I5, 2I, 29] - различные варианты теоремы Фробениуса.

В книге изучаются линейные дифференциальные уравнения, в которых аргумент неизвестной функции изменяется на некотором многообразии, а ее значения принадлежат некторой группе Ли. В классической ситуации роль многообразия играет интервал на числовой оси или область в эвклидовом пространстве, а роль группы Ли - группа всех обратимых матриц некоторого порядка (или какая-либо ее подгруппа); дифференциальное уравнение рассматриваемого типа при этом обращается в линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений или в многомерное линейное дифференциальное уравнение (об уравнении последнего вида см. [39]).

Первая глава посвящена вопросам разрешимости линейных дифференциальных уравнений на многообразиях и построению их фундаментальных решений. Здесь же определяются гомоморфизмы монодромии вполне интегрируемых уравнений, которые используются в третьей главе для классификации линейных дифференциальных уравнений.

Для того чтобы ввести понятие линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, многообразие нужно предполагать снабженным некоторой дополнительной структурой. Во второй главе определяются и изучаются уравнения с постоянными коэффициентами на многообразиях линейной связности. Устанавливается связь между фундаментальными решениями таких уравнений и аффинными отображениями. Полученные результаты детализируются на примерах многообразий с абсолютным параллелизмом (в частности для групп Ли и их однородных пространств по дискретным подгруппам).

В третьей главе решается задача классификации линейных дифференциальных уравнений на многообразиях относительно линейных замен неизвестной функции. Выясняется алгебраический смысл и получается обобщение классической теоремы Перрона о приведении к треугольному виду.

Четвертая глава посвящена построению теории Ляпунова-Флоке для линейных дифференциальных уравнений на многообразиях линейной связности. Известное различие между условиями теоремы Ляпунова о приводимости к уравнению с постоянными коэффициентами в комплексном и вещественном случаях находит в общей теории отражение в том, что иногда уравнение приводится к постоянным коэффициентам не на самом многообразии, а на некотором его накрытии.

При написании главы I монографии использованы книга [5] и работы [37, 40]; главы 2 - работы [36-38, 40]; главы 3 - статьи [37, 40] и классическая монография [28]; главы 4 - работы [35-38, 40, 41].

Авторы считают своим долгом отметить также, что вдохновляющим стимулом для написания данной книги послужили лекции А.Л.Онищика, прочитанные им в 1972 г. в Воронежской зимней математической школе.

Для списка литературы авторы отобрали (руководствуясь принципом доступности) только учебники и монографии на русском языке. Единственное исключение сделано для двухтомной, имеющей энциклопедический характер монографии Кобаяши и Номидзу [34]. Из журнальных статей ссылки даются только на те работы, результаты которых не получили пока монографического освещения, но имеют непосредственное отношение к проблематике данной книги.

В книге применяется сокращение: л. д. у. - линейное дифференциальное уравнение.

Нумерация формул трехзначная: ($№_I$. $№_2$. $№_3$), где $№_I$ - номер главы, $№_2$ - номер параграфа, $№_3$ - номер формулы. При ссылках внутри главы номер $№_I$ опускается. Аналогичным образом нумеруются теоремы, предложения, леммы и т. п.

ГЛАВА 0

ВВЕДЕНИЕ

§ I. Многообразия

I. Гладкие многообразия. Структура m-мерного C^∞-многообразия на топологическом пространстве M задается некоторым максимальным атласом $\{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$, где U_i – открытое подмножество в M, $\varphi_i: U_i \to \varphi_i(U_i)\subset \mathbb{R}^m$ – гомеоморфизм на открытое подмножество в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, и требуется, чтобы для непустых пересечений $U_i\cap U_j$ отображения $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$ принадлежали классу C^∞.

Если (U,φ) – некоторая карта на M, и $pr_i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ есть проекция $\mathbb{R}^m$ на i-й сомножитель, то набор функций $x^i = pr_i\circ\varphi$, $i=1,\dots,m$, называется координатами в окрестности U.

2. Гладкие отображения. Отображение $f: M_1\to M_2$ двух многообразий называется гладким, если для любых двух карт (U_i,φ_i) – в M_1 и (V_j,ψ_j) – в M_2 отображение $\psi_j\circ f\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i)\to\psi_j(V_j)$ принадлежит классу C^∞. Множество дифференцируемых отображений из многообразия M_1 в многообразие M_2 будет обозначаться $C^\infty(M_1,M_2)$.

Гладкое отображение $f: M_1\to M_2$ называется диффеоморфизмом, если определено и является гладким обратное отображение $f^{-1}: M_2\to M_1$.

Гладкая кривая (или путь) в многообразии M – это гладкое отображение $\psi: I\to M$ некоторого (открытого или замкнутого) интервала $I\subset\mathbb{R}$ в многообразие M (гладкость на замкнутом интервале понимается как возможность гладкого продолжения на какой-либо открытый интервал, содержащий данный замкнутый).

3. Касательные векторы. Касательным ветором в точке $x\in M$ называется отображение $X: \mathcal{F}_x\to\mathbb{R}$ (где $\mathcal{F}_x$ – алгебра вещественных функций, определенных в окрестности точки x), удовлетворяющее свойствам: (i) – X – линейно; (ii) – $X(fg) = (Xf)g(x) + f(x)Xg$; $f,g\in\mathcal{F}_x$. Примером касательного вектора является касательный вектор к кривой $\psi: I\to M$, $\psi(t_0)=x$. Этот вектор, обозначаемый $\psi_*(t_0)$, определяется следующим образом:

$$\psi_*(t_0)f = \frac{d}{dt}(f\circ\psi)(t)\Big|_{t=t_0}\ ;\quad f\in\mathcal{F}_x \tag{I.1}$$

На самом деле любой касательный вектор является касательным к некоторой кривой. Множество касательных векторов в точке $x\in M$

представляет собой линейное пространство, размерность которого совпадает с размерностью m многообразия M и которое обозначается T_xM. В пространстве T_xM может быть выбран базис, составленный из векторов $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x\}_{i=1}^m$, где $(x^1,\dots,x^m)$ – локальные координаты в окрестности точки x.

4. Векторные поля. Векторное поле на многообразии M – это отображение X, ставящее в соответствие каждой точке $x\in M$ касательный вектор $X(x)\in T_xM$. Поле X действует на функции:

$$(Xf)(x) = X(x)f\ ;\quad f\in\mathcal{F}(M) = C^\infty(M,\mathbb{R}).$$

Поле X называется гладким, если для любой гладкой функции f функция Xf также гладка. Гладкое поле является, таким образом, дифференцированием $X: C^\infty(M,\mathbb{R})\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ алгебры функций $C^\infty(M,\mathbb{R})$.

Множество гладких векторных полей на многообразии M обозначается $\mathfrak{X}(M)$.

В локальных координатах $(x^1,\dots,x^m)$ в окрестности $U\subset M$ всякое поле X можно разложить по базисным полям $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$:

$$X(x) = \sum_{i=1}^m X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\ ;\quad x\in U, \tag{I.2}$$

где $X^i\in C^\infty(U,\mathbb{R})$, а векторное поле $\frac{\partial}{\partial x^i}$ определяется равенством $\frac{\partial}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$, аргумент для базисных полей будем опускать.

5. Скобка веторных полей определяется формулой

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)\ ;\ X,Y\in\mathfrak{X}(M);\ f\in\mathcal{F}(M). \tag{I.3}$$

В локальных координатах можно записать:

$$[X,Y]^i = \sum_{k=1}^m\left(X^k\frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right);\quad i=1,\dots,m. \tag{I.4}$$

По отношению к операции $[\cdot,\cdot]$ пространство $\mathfrak{X}(M)$ векторных полей образует алгебру Ли, т. е. выполнены следующие свойства (антикоммутативность и тождество Якоби):

$$[X,Y] = -[Y,X]\ ; \tag{I.5}$$

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0\ , \tag{I.6}$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Для векторных полей определено умножение слева на функции

$$(fX)(x) = f(x)X(x) \;;\; x \in M;\; X \in \mathfrak{X}(M);\; f \in \mathcal{F}(M). \tag{I.7}$$

Операции (I.3) и (I.7) связаны соотношением

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X;\; f,g \in \mathcal{F}(M);\; X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{I.8}$$

6. <u>Ковекторы</u>. Пространство T_x^*M, двойственное к касательному пространству T_xM, называется кокасательным пространством в точке $x \in M$, а его элементы называются ковекторами в точке x. Значение ковектора $\alpha \in T_x^*M$ на векторе $X \in T_xM$ будем обозначать $\langle \alpha, X \rangle$. Базис $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}_{i=1}^m$ в T_xM порождает дуальный базис $\{dx^i|_x\}_{i=1}^m$ в T_x^*M:

$$\langle dx^j|_x, \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \rangle = \delta_i^j \;;\; i,j = 1,\dots,m.$$

Всякий ковектор $\alpha \in T_x^*M$ можно разложить по базису $\{dx^i\}_{i=1}^m$:

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i\, dx^i|_x. \tag{I.9}$$

Функция $f \in \mathcal{F}_x$ порождает некоторый ковектор $df|_x \in T_x^*M$ (дифференциал функции f в точке x):

$$\langle df|_x, X \rangle = Xf \;;\; X \in T_xM \tag{I.10}$$

и, следовательно,

$$df|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x dx^i|_x. \tag{I.11}$$

7. <u>Ковекторные поля</u>. Ковекторное поле на многообразии M – это отображение α, ставящее в соответствие точке $x \in M$ ковектор $\alpha(x) \in T_x^*M$.

В локальных координатах можно записать

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\, dx^i \;;\; x \in U, \tag{I.12}$$

где ковекторное поле dx^i определяется равенством $(dx^i)(x) = dx^i|_x$.

Ковекторное поле называется гладким, если все функции $\alpha_i(x)$ в (I.12) гладкие (на самом деле от выбора локальных координат это определение не зависит). Аргумент у полей dx^i опускается.

Если $f \in \mathcal{F}(M)$, то определено гладкое ковекторное поле

$(df)(x) = df|_x$ и, согласно (I.11), будем иметь

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i, \tag{I.13}$$

причем очевидно, что ковекторные поля dx^i представляют собой не что иное, как дифференциалы координатных функций.

Ковекторные поля по-другому называются дифференциальными формами степени I. Векторное пространство всех ковекторных полей будем обозначать $\Lambda^1(M)$.

Для $\alpha \in \Lambda^1(M)$ определено значение этого ковекторного поля на векторном поле $X \in \mathfrak{X}(M)$: $\langle \alpha, X \rangle(x) = \langle \alpha(x), X(x) \rangle$. Таким образом, ковекторное поле (дифференциальная форма степени I) определяет $\mathcal{F}(M)$ – линейное отображение

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M). \tag{I.14}$$

Обратно, всякое отображение (I.14) определяет ковекторное поле.

8. <u>Тензорная алгебра векторного пространства</u>. Тензорной алгеброй векторного пространства E называется прямая сумма векторных пространств:

$$\mathcal{T}(E) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \oplus\, T_p^q(E), \tag{I.15}$$

где

$$T_p^q(E) = \underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{q \text{ раз}} \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{p \text{ раз}} \tag{I.16}$$

пространство тензоров типа (q, p); $T_0^0(E) = \mathbb{R}$. Имеют место канонические изоморфизмы

$$T_p^0(E) \simeq L^p(E;\mathbb{R}) \;; \tag{I.17}$$

$$T_0^q(E) \simeq L^q(E^*;\mathbb{R}) \;; \tag{I.18}$$

$$T_p^1(E) \simeq L^p(E;E) \;; \tag{I.19}$$

$$T_1^q(E) \simeq L^q(E^*;E^*), \tag{I.20}$$

где символом $L^p(E;F)$ обозначено пространство p-линейных отображений из $\underbrace{E \times \dots \times E}_{p}$ в F.

Структура алгебры в пространстве $\mathcal{T}(E)$ задается тензорным умножением: для

$$K = v_1 \otimes \ldots \otimes v_q \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^p \in T^q_p(E) \qquad (1.21)$$

и

$$L = v_1' \otimes \ldots \otimes v_r' \otimes' w^1 \otimes \ldots \otimes' w^s \in T^r_s(E) \qquad (1.22)$$

определяется элемент

$$K \otimes L = v_1 \otimes \ldots \otimes v_q \otimes v_1' \otimes \ldots \otimes v_r' \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^p \otimes' w^1 \otimes \ldots \otimes' w^s \in T^{q+r}_{p+s}(E). \qquad (1.23)$$

Кроме операции $\otimes$ в $\mathbb{T}(E)$ определена операция свертывания:

$$Contr^j_i : T^q_p(E) \longrightarrow T^{q-1}_{p-1}(E), \qquad (1.24)$$

где $1 \le j \le q$, $1 \le i \le p$, и действие этой операции задается формулой

$$Contr^j_i (v_1 \otimes \ldots \otimes v_q \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^p) =$$

$$= \langle w^i, v_j \rangle (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{j-1} \otimes v_{j+1} \otimes \ldots \otimes v_q \otimes w^1 \otimes \ldots \otimes w^{i-1} \otimes w^{i+1} \otimes \ldots \otimes w^p), \qquad (1.25)$$

где скобки $\langle \cdot , \cdot \rangle$ обозначают каноническое спаривание $E^* \times E \to \mathbb{R}$ (действие функционала на элементе).

Если в E выбран базис $\{e_i\}^m_{i=1}$, а в E^* -дуальный базис $\{e^i\}^m_{i=1}$, то всякий элемент $K \in T^q_p(E)$ можно разложить следующим образом:

$$K = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q \le m} K^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_q} \otimes e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}. \qquad (1.26)$$

Числа $K^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ называются компонентами тензора K относительно выбранных базисов.

В компонентах операции $\otimes$ и $Contr^j_i$ выглядят следующим образом:

$$(K \otimes L)^{j_1 \ldots j_{q+r}}_{i_1 \ldots i_{p+s}} = K^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} L^{j_{q+1} \ldots j_{q+r}}_{i_{p+1} \ldots i_{p+s}}; \qquad (1.27)$$

$$(Contr^j_i K)^{j_1 \ldots j_{q-1}}_{i_1 \ldots i_{p-1}} = \sum_{k=1}^m K^{j_1 \ldots k \ldots j_{q-1}}_{i_1 \ldots k \ldots i_{p-1}}, \qquad (1.28)$$

где индекс k вверху ставится на j -е место, а внизу - на i -е.

9. Тензорная алгебра многообразия. Тензорные поля. Тензорной алгеброй многообразия M в точке $x \in M$ называется тензорная алгебра касательного пространства $T_x M$:

$$T_x(M) = \mathbb{T}(T_x M) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \oplus (T^q_p)_x M, \qquad (1.29)$$

где

$$(T^q_p)_x M = T^q_p(T_x M). \qquad (1.30)$$

Стандартным образом определяются тензорные поля на M: тензорное поле K типа (q , p) - это отображение, ставящее в соответствие точке x некоторый тензор $K(x) \in (T^q_p)_x M$. Поля типа (0,0) - это просто функции, поля типа (1,0) - векторные поля, поля типа (0,1) - ковекторные поля (дифференциальные формы степени 1).

В локальных координатах ($x^1, \ldots, x^m$) в окрестности $U \subset M$ всякое тензорное поле можно записать в виде

$$K(x) = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_q \le m} K^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \otimes dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p}. \qquad (1.31)$$

Поле K называется гладким, если гладкими являются функции $K^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}(x)$ в разложении (1.31) [определение на самом деле не зависит от выбора локальных координат].

Множество тензорных полей типа (q , p) на многообразии M обозначается $T^q_p(M)$.

Можно отождествить $T^q_p(M)$ с пространством тензоров типа (q , p) пространства $\mathcal{X}(M)$:

$$T^q_p(M) \simeq T^q_p(\mathcal{X}(M)) \qquad (1.32)$$

и далее

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \oplus T^q_p(M) = \mathbb{T}(M) \simeq \mathbb{T}(\mathcal{X}(M)) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \oplus T^q_p(\mathcal{X}(M)). \qquad (1.33)$$

В частности, как уже отмечалось, $T^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$; $T^1_0(M) = \mathcal{X}(M)$; $T^0_1(M) = \Lambda^1(M)$.

Поля типа (q , p) называются q раз контравариантными и p раз ковариантными. Если взять значение поля типа (q , p) на p векторных полях, то получится поле типа (q , 0).

Операции над тензорами (тензорное умножение и свертывание) переносятся на тензорные поля, над которыми они выполняются поточечно.

10. Внешняя алгебра векторного пространства. Обозначим для векторного пространства E

$$\Lambda^p(E^*) = L^p_{alt}(E; \mathbb{R}), \qquad (1.34)$$

где знак alt означает, что берутся кососимметрические полилинейные стображения; обозначим также

$$\Lambda(E^*) = \sum_{p=0}^{\infty} \oplus \Lambda^p(E^*) . \tag{I.35}$$

В пространстве $\Lambda(E^*)$ вводится кософкоммутативное умножение (оно называется внешним умножением):

$$\wedge : \Lambda^p(E^*) \times \Lambda^q(E^*) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(E^*) \tag{I.36}$$

с помощью формулы

$$\langle \omega \wedge \omega' ; v_1, \dots, v_{p+q} \rangle = \sum_{\substack{\sigma(1)<\sigma(2)<\dots<\sigma(p) \\ \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\dots<\sigma(p+q)}} sgn\, \sigma \, \langle \omega ; v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)} \rangle \langle \omega' ; v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)} \rangle , \tag{I.37}$$

где суммирование ведется по так называемым <u>тасующим</u> подстановкам σ (что это означает - написано под знаком суммы) множества $\{1, 2, \dots, p+q\}$; $sgn\, \sigma$ - знак (четность) подстановки σ.

Эквивалентным способом определения умножения $\wedge$ является следующий:

$$\omega \wedge \omega' = \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \, Alt(\omega \otimes \omega') , \tag{I.38}$$

где операция альтернирования

$$Alt : T^0_r(E) \longrightarrow \Lambda^r(E^*) \tag{I.39}$$

задается после учета изоморфизма (I.17) формулой:

$$\langle Alt\, K ; v_1, \dots, v_r \rangle = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma} sgn\, \sigma \, \langle K ; v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)} \rangle . \tag{I.40}$$

Здесь суммирование ведется <u>по всем</u> подстановкам множества $\{1, \dots, r\}$.

II. <u>Дифференциальные формы</u>. Дифференциальными формами степени p называются кососимметричные (альтернированные) тензорные поля типа (0, p). Множество дифференциальных форм степени p (p - форм) обозначается $\Lambda^p(M)$. В каждой точке $x \in M$ значение p -формы $\omega \in \Lambda^p(M)$ представляет собой [в силу изоморфизма (I.17)] элемент $\omega(x) \in \Lambda^p(T^*_x M) = L^p_{alt}(T_x M ; \mathbb{R})$ пространства альтернированных p -линейных отображений из $\underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{p}$ в $\mathbb{R}$. Значение этого элемента на векторах $X_1, \dots, X_p \in T_x M$ будем обозначать $\langle \omega(x) ; X_1, \dots, X_p \rangle$. Аналогичным образом обозначается значение p -формы, рассматриваемой [в силу изоморфизма

(I.32)] как элемент

$$\omega \in L^p_{alt}(\mathcal{X}(M) ; \mathcal{F}(M)) \tag{I.41}$$

пространства $\mathcal{F}(M)$-p -линейных [т. е. p -линейных над кольцом $\mathcal{F}(M)$] кососимметричных отображений из пространства $\underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{p \text{ раз}}$ в $\mathcal{F}(M)$:

$$\langle \omega ; X_1, \dots, X_p \rangle (x) = \langle \omega(x) ; X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle \; ; X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M) . \tag{I.42}$$

Формы степени I есть, очевидно, ковекторные поля, а формы степени 0 - просто функции.

I2. <u>Внешнее умножение дифференциальных форм</u>. Для двух форм $\omega \in \Lambda^p(M)$, $\omega' \in \Lambda^q(M)$ определяется их внешнее произведение $\omega \wedge \omega' \in \Lambda^{p+q}(M)$ формулой

$$(\omega \wedge \omega')(x) = \omega(x) \wedge \omega'(x) , \tag{I.43}$$

где в правой части (I.43) стоит внешнее умножение в алгебре $\Lambda(T^*_x M)$ [см. (I.37)].

Если понимать дифференциальные формы в смысле (I.41), то можно записать:

$$\langle \omega \wedge \omega' ; X_1, \dots, X_{p+q} \rangle = \sum_{\substack{\sigma(1)<\dots<\sigma(p) \\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}} sgn\, \sigma \, \langle \omega ; X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)} \rangle \langle \omega' ; X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)} \rangle . \tag{I.44}$$

Внешнее умножение ассоциативно, дистрибутивно по отношению к сложению и кософкоммутативно:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1 \;\; ; \; \omega_1 \in \Lambda^p(M) \; ; \; \omega_2 \in \Lambda^q(M) . \tag{I.45}$$

Всякую дифференциальную форму в локальных координатах можно представить в виде

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le m} \omega_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} , \tag{I.46}$$

и тогда внешнее произведение p -формы (I.46) на q -форму

$$\omega'(x) = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_q \le m} \omega'_{j_1 \dots j_q}(x)\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

определяется формулой

$$\omega \wedge \omega' = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{p+q} \le m} \Big(\sum_{\substack{\sigma(i_1)<\dots<\sigma(i_p) \\ \sigma(i_{p+1})<\dots<\sigma(i_{p+q})}} sgn\, \sigma \; \omega_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_p)} \omega'_{\sigma(i_{p+1})\dots\sigma(i_{p+q})} \Big) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+q}} . \tag{I.47}$$

13. <u>Внешний дифференциал</u>. Оператор внешнего дифференцирования определяется как отображение

$$d : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(M) \ ; \quad p = 0, 1, \dots, m, \qquad (I.48)$$

обладающее следующими свойствами:

(I) d есть $\mathbb{R}$-линейное отображение;

(2) для $f \in \Lambda^0(M)$ df есть дифференциал функции в смысле (I.13);

(3) для $\omega \in \Lambda^p(M)$, $\omega' \in \Lambda^q(M)$

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^p \omega \wedge d\omega' \ ; \qquad (I.49)$$

(4) $d^2 = 0$. (I.50)

Свойства (I) - (4) однозначно определяют оператор (I.48). В локальных координатах, если ω задается формулой (I.46), для $d\omega$ получаем

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_{p+1} \le m} \Big(\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \omega_{i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_{p+1}} \Big) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+1}} \qquad (I.51)$$

Если понимать дифференциальную форму в смысле (I.41), то получится следующая формула для внешнего дифференциала:

$$\langle d\omega; X_1, \dots, X_{p+1} \rangle = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \langle \omega; X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1} \rangle +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+j} \langle \omega; [X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1} \rangle, \qquad (I.52)$$

где $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$; $\omega \in \Lambda^p(M)$, а колпачок над буквой означает, что ее надо пропустить.

14. <u>Когомологии де Рама</u>. Форма $\omega \in \Lambda^p(M)$ называется замкнутой, если $d\omega = 0$, и точной, если найдется $\omega' \in \Lambda^{p-1}(M)$, такая, что $\omega = d\omega'$. Из (I.50) следует, что всякая замкнутая форма точна, т. е.

$$B^p(M) \subset Z^p(M) \ , \qquad (I.53)$$

где

$$Z^p(M) = \mathrm{Ker}\, \{ d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M) \} \ - \qquad (I.54)$$

пространство замкнутых p-форм, а

$$B^p(M) = \mathrm{Im}\, \{ d : \Lambda^{p-1}(M) \to \Lambda^p(M) \} \ - \qquad (I.55)$$

пространство точных p-форм.

Фактор-пространство

$$H^p_{de\,Rham}(M) = Z^p(M) / B^p(M) \qquad (I.56)$$

называется пространством дерамовских когомологий многообразия M.

15. <u>Касательное отображение</u>. Пусть $F \in C^\infty(M_1, M_2)$. Касательное отображение в точке $x \in M_1$

$$F_{*,x} : T_x M_1 \longrightarrow T_{F(x)} M_2 \qquad (I.57)$$

определяется следующим образом:

$$F_{*,x}(X) f = X(f \circ F) ; \quad f \in \mathcal{F}_{F(x)} \ ; \ X \in T_x M_1 . \qquad (I.58)$$

Если X - касательный вектор к кривой $\psi : I \to M_1$, (т.е. $X = \psi_*(t_0)$, $t_0 \in I$), то $F_{*,x}(X)$ - касательный вектор к кривой $F \circ \psi$, т. е.

$$F_{*,x}(\psi_*(t_0)) = (F \circ \psi)_*(t_0) \ . \qquad (I.59)$$

Сам касательный вектор $\psi_*(t_0)$ к кривой ψ можно понимать в следущем смысле:

$$\psi_*(t_0) = \psi_{*,t_0}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \Big) \ , \qquad (I.60)$$

где $\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \in T_{t_0}\mathbb{R}$ - базисный касательный вектор к $\mathbb{R}$ в точке t_0.

Отображение кокасательных пространств, двойственное отображению (I.57), будем обозначать:

$$F^*{}_{,x} : T^*_{F(x)} M_2 \longrightarrow T^*_x M_1 \qquad (I.61)$$

Оно определяется формулой

$$\langle (F^*{}_{,x})\alpha, X \rangle = \langle \alpha, F_{*,x} X \rangle \ ; \ \alpha \in T^*_{F(x)} M_2 \ ; \ X \in T_x M_1 \ . \qquad (I.62)$$

Действие касательного отображения на p-линейные отображения

$$(F^*{}_{,x})_p : L^p(T_{F(x)} M_2 ; \mathbb{R}) \longrightarrow L^p(T_x M_1 ; \mathbb{R}) \qquad (I.63)$$

задается формулой

$$\langle (F^*{}_{,x})_p \omega; X_1, \dots, X_p \rangle = \langle \omega; (F_{*,x}) X_1, \dots, (F_{*,x}) X_p \rangle \ ; \qquad (I.64)$$

$$\omega \in L^p(T_{F(x)} M_2; \mathbb{R}) \ ; \ X_i \in T_x M_1 \ ; \ i = 1, \dots, p \ .$$

Отображение (I.63) позволяет для любого <u>ковариантного</u> тензорного поля (в частности, для любой дифференциальной формы) на M_2 определить его <u>обратный образ</u> на M_1. Соответствующее отображение

$$F^{*}: T^{0}_{p}(M_2) \longrightarrow T^{0}_{p}(M_1);\ p=0,1,\dots \qquad (I.65)$$

действует по следующему правилу:

$$(F^{*}\omega)(x) = (F^{*}{}_{,x})_p\, \omega(x)\ ;\ \omega \in T^{0}_{p}(M_2);\ p=0,1,\dots \qquad (I.66)$$

Для функций ($p=0$) отображение

$$F^{*} : \mathcal{F}(M_2) \longrightarrow \mathcal{F}(M_1) \qquad (I.67)$$

определяется равенством

$$(F^{*}f)(x) = f(F(x))\ ;\ x\in M_1\ ;\ f\in \mathcal{F}(M_2). \qquad (I.68)$$

Отображения (I.65) для дифференциальных форм, т. е. отображения

$$F^{*}: \Lambda^{p}(M_2) \longrightarrow \Lambda^{p}(M_1)\ ;\ p=0,1,\dots \qquad (I.69)$$

коммутируют с внешним дифференциалом (I.48) и внешним умножением (I.37):

$$d\cdot F^{*} = F^{*}\cdot d\ ; \qquad (I.70)$$

$$F^{*}(\omega_1\wedge\omega_2) = F^{*}\omega_1 \wedge F^{*}\omega_2\ ;\ \omega_1,\omega_2\in\Lambda(M). \quad (I.71)$$

Касательное отображение, примененное к (контравариантному) векторному полю, вообще говоря, не дает в результате векторное поле. Если, тем не менее, для двух векторных полей $X\in\mathfrak{X}(M_1)$ и $Y\in\mathfrak{X}(M_2)$ имеет место соотношение

$$(F_{*,x})\,X(x) = Y(F(x))\ ;\ x\in M_1, \qquad (I.72)$$

то поля X, Y называются <u>F-связанными</u>.

Если поля $X_1, X_2\in\mathfrak{X}(M_1)$ F-связаны с полями $Y_1,Y_2\in\mathfrak{X}(M_2)$, соответственно, то поле $[X_1,X_2]$ F-связано с полем $[Y_1,Y_2]$.

Если отображение $F: M_1 \xrightarrow{\simeq} M_2$ является диффеоморфизмом, то определен образ $F_*X\in\mathfrak{X}(M_2)$ векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M_1)$:

$$(F_*X)(y) = (F_{*,F^{-1}(y)})\,X(F^{-1}(y))\ ;\ y\in M_2. \qquad (I.73)$$

В частности, любой диффеоморфизм $F: M\xrightarrow{\simeq} M$ порождает автоморфизм F_* алгебры Ли $\mathfrak{X}(M)$ и автоморфизм F^* внешней алгебры $\Lambda(M)$.

Укажем две формулы, связывающие операции F^* и F_* для диффеоморфизма $F\in \mathrm{Diff}(M)$:

$$F^{*}((F_*X)f) = X(F^{*}f)\ ;\ f\in\mathcal{F}(M),\ X\in\mathfrak{X}(M)\ ; \qquad (I.74)$$

$$\langle F^{*}\alpha, X\rangle = F^{*}\langle\alpha, F_*X\rangle\ ;\ \alpha\in\Lambda^{1}(M),\ X\in\mathfrak{X}(M). \qquad (I.75)$$

Для дифференциала гладкого отображения $F: M_1\times M_2 \longrightarrow N$ произведения многообразий справедлива формула:

$$F_{*,(x_1,x_2)}Z = ((F_1)_{x_2})_{*,x_1}X_1 + ((F_2)_{x_1})_{*,x_2}X_2\ , \qquad (I.76)$$

где $Z=(X_1,X_2)\in T_{(x_1,x_2)}(M_1\times M_2)\simeq T_{x_1}M_1\oplus T_{x_2}M_2$; а отображения $(F_1)_{x_2}: M_1\to N$; $(F_2)_{x_1}: M_2\to N$ определяются формулами

$$(F_1)_{x_2}(x_1) = (F_2)_{x_1}(x_2) = F(x_1,x_2)\ .$$

16. <u>Однопараметрические группы преобразований</u>. Всякое векторное поле $X\in\mathfrak{X}(M)$ в некоторой окрестности U произвольной точки $x\in M$ определяет <u>локальную однопараметрическую группу преобразований</u>, т. е. семейство $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ локальных диффеоморфизмов $g_t: U\to g_t(U)$, для которых выполняются следующие условия: (I) отображение $(t,x)\mapsto g_t(x)$ дифференцируемо; (2) если $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$ и $g_t(x), x\in U$; то $(g_s\circ g_t)(x) = g_{s+t}(x)$.

Поле X в окрестности U восстанавливается по однопараметрической группе следующим образом:

$$(Xf)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(g_t(x)) - f(x)}{t}\ ;\ x\in U,\ f\in\mathcal{F}(U). \qquad (I.77)$$

Поле X называется <u>полным</u>, если оно индуцируется некоторой однопараметрической группой $\{g_t\}_{t\in(-\infty,\infty)}$ глобальных диффеоморфизмов $g_t: M\to M$. Всякое векторное поле с компактным носителем (в частности, всякое векторное поле на компактном многообразии) полно.

Скобка векторных полей $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, имеющих локальные однопараметрические группы g_t и h_t, соответственно, выражается формулой

$$[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{Y-(g_t)_*Y}{t}\ , \qquad (I.78)$$

где $(g_t)_*Y$ – образ поля Y при диффеоморфизме g_t (см. (I.73)). Из (I.78) вытекает, что $[X,Y]=0$ в том и только том случае, если g_t и h_s коммутируют при любых значениях s и t.

Если $X\in\mathfrak{X}(M)$, то кривая $\varphi: I\to M$ (где I – интервал на числовой оси) называется <u>интегральной кривой</u> поля X, если

$$\varphi_*(t) = X(\varphi(t))\ ;\ t\in I\ . \qquad (I.79)$$

Понятия интегральной кривой и локальной однопараметрической группы связаны следующим образом: если $\{g_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ – однопараметрическая группа поля X в некоторой окрестности точки $x\in M$, то $\varphi(t)=g_t(x)$ – есть интегральная кривая поля X, проходящая через точку x.

17. Векторнозначные тензорные поля и дифференциальные формы. Пусть V - конечномерное векторное пространство. V - значным тензором в векторном пространстве E называется элемент пространства $\mathbb{T}(E)\otimes V$. Векторнозначные тензоры можно умножать; при этом получится операция

$$(\mathbb{T}(E)\otimes V_1)\times(\mathbb{T}(E)\otimes V_2)\longrightarrow \mathbb{T}(E)\otimes(V_1\otimes V_2). \qquad (I.80)$$

Если определено билинейное спаривание

$$\theta: V_1\times V_2 \longrightarrow V, \qquad (I.81)$$

то операция (I.80) порождает операцию

$$\theta: (\mathbb{T}(E)\otimes V_1)\times(\mathbb{T}(E)\otimes V_2)\longrightarrow \mathbb{T}(E)\otimes V. \qquad (I.82)$$

Частными случаями пространств V_1, V_2, для которых возможно умножение (I.82), являются следующие: 1) $V_1=V_2=V=\mathbb{R}$; спаривание (I.81) есть просто умножение; 2) $V_2=V$; $V_1=L(V)$ - пространство линейных операторов в пространстве V; спаривание $L(V)\times V\to V$, есть вычисление значения оператора на элементе; 3) $V_1=V_2=V$ - алгебра, ассоциативная или Ли; спаривание есть умножение в алгебре.

Операции над векторнозначными тензорами переносятся на тензорные поля на многообразии и, в частности, на дифференциальные формы.

Пусть $\mathfrak{a}$ -алгебра Ли. Для $\mathfrak{a}$-значных дифференциальных форм справедливы следующие свойства операции

$$[\cdot\,,\cdot]: \Lambda^p(M,\mathfrak{a})\times\Lambda^q(M,\mathfrak{a})\longrightarrow\Lambda^{p+q}(M,\mathfrak{a}), \qquad (I.83)$$

где $\Lambda^p(M,\mathfrak{a})$- обозначение для пространства $\mathfrak{a}$ -значных дифференциальных форм:

$$[\alpha,\beta]=(-1)^{pq+1}[\beta,\alpha]\ ;\ \alpha\in\Lambda^p(M,\mathfrak{a}),\ \beta\in\Lambda^q(M,\mathfrak{a}). \qquad (I.84)$$

В частности, для $\alpha,\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ внешняя скобка коммутативна: $[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$.

Для форм со значениями в ассоциативной алгебре их умножение также ассоциативно.

Рассмотрим случай форм со значениями в алгебре $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ всех $(n\times n)$-матриц с коэффициентами из поля $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Эту алгебру можно одновременно рассматривать и как ассоциативную, и как алгебру Ли. Поэтому для $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ -значных форм определено два умножения: $[\,.\,,\,.\,]$ и $\wedge$. Нетрудно доказать, что для $\alpha=\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}))$ справедливо равенство

$$\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]=\alpha\wedge\alpha. \qquad (I.85)$$

Для векторнозначных форм определяются операции внешнего дифференцирования d и обратного образа F^*, с сохранением всех основных свойств, присущих этим операциям в случае скалярных форм.

В локальных координатах V -значные тензорные поля представляются в виде (I.31) с коэффициентами $K^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_p}(x)$, принадлежащими пространству V.

§ 2. Группы и алгебры Ли

1. Группы Ли. Многообразие G, являющееся одновременно группой, называется группой Ли, если групповые операции непрерывны, т. е., если отображение

$$G\times G\ni(g,h)\longmapsto gh^{-1}\in G \qquad (2.1)$$

непрерывно. Из непрерывности (2.1) уже следует, что (2.1) принадлежит классу C^∞ и даже аналитично.

Класс групп Ли образует категорию, если в качестве морфизмов взять непрерывные гомоморфизмы (они автоматически будут уже и гладкими и аналитическими).

2. Сдвиги и автоморфизмы. С каждым элементом $g\in G$ связаны следующие диффеоморфизмы группы Ли:

(i) левый сдвиг:

$$G\ni x\longmapsto L_g x = gx\in G\ ; \qquad (2.2)$$

(ii) правый сдвиг:

$$G\ni x\longmapsto R_g x = xg\in G\ ; \qquad (2.3)$$

(iii) внутренний автоморфизм:

$$G\ni x\longmapsto(\operatorname{Int} g)x=(L_g\cdot R_{g^{-1}})x=gxg^{-1}\in G. \qquad (2.4)$$

Для отображений (2.2)-(2.4) справедливы следующие соотношения:

$$L_{gh}=L_g\cdot L_h\ ;\ L_{g^{-1}}=(L_g)^{-1}\ ; \qquad (2.5)$$

$$R_{gh}=R_h\cdot R_g\ ;\ R_{g^{-1}}=(R_g)^{-1}\ ; \qquad (2.6)$$

$$L_g\cdot R_h=R_h\cdot L_g\ ; \qquad (2.7)$$

$$\operatorname{Int}(gh)=\operatorname{Int} g\cdot\operatorname{Int} h\ ;\ \operatorname{Int}(g^{-1})=(\operatorname{Int} g)^{-1}. \qquad (2.8)$$

3. Подгруппы. Подгруппа H в группе Ли G, являющаяся одновременно подмногообразием в G, называется подгруппой Ли группы G. Связная компонента G_0 единицы $1\in G$ является открытой подгруппой и нормальным делителем в группе G.

Всякая линейно-связная подгруппа группы Ли является подгруппой Ли (теорема Ямабе).

4. Действия и представления. Говорят, что группа G действует (слева) на множестве M, если задано отображение

$$M\times G \ni (x,g) \longmapsto \rho(g)x \in M \tag{2.9}$$

такое, что

$$\rho(g_1 g_2)x = \rho(g_1)\rho(g_2)x\ ;\ x\in M,\ g_1,g_2\in G. \tag{2.10}$$

Правое действие определяется, если заменить (2.10) на

$$\rho(g_1 g_2)x = \rho(g_2)\rho(g_1)x\ ;\ x\in M,\ g_1,g_2\in G. \tag{2.10}$$

Если M – многообразие, а G – группа Ли, то в определении действия требуется, чтобы отображение (2.9) было гладким.

Группа Ли действует на себя слева левыми сдвигами и справа – правыми.

Если группа G действует на множестве M, то символом $[M]^G$ обозначается множество инвариантов этого действия, т. е. множество

$$[M]^G = \{x\in M : \rho(g)x = x,\ \forall g\in G\}. \tag{2.11}$$

Действие ρ группы G на множестве M называется транзитивным, если для любых двух точек $x,y\in M$ найдется элемент $g\in G$, что $\rho(g)x=y$. Если такой элемент g определяется единственным образом, то действие ρ называется свободным. Левое и правое действия группы на себе свободны.

5. Лево- и правоинвариантные поля. Алгебра Ли группы Ли. Пусть G группа Ли. Векторное поле $X\in \mathfrak{X}(G)$ называется лево- (право-) инвариантным, если

$$(L_g)_* X = X\quad ;\quad g\in G, \tag{2.12}$$

или, соответственно,

$$(R_g)_* X = X\quad ;\quad g\in G. \tag{2.12}$$

Как лево-, так и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G образуют алгебру Ли относительно скобки векторных полей (см. § I, п. 5), т. е. скобка двух лево- (право-) инвариантных полей снова есть лево- (право-) инвариантное поле (а скобка полей, как известно из § I, антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби). Алгебра Ли левоинвариантных полей на G будет обозначаться $\mathfrak{g}_{left} = \mathrm{Lie}(G)$ (или просто $\mathfrak{g}$) и называться алгеброй Ли группы Ли G. Алгебра Ли правоинвариантных полей будет обозначаться $\mathfrak{g}_{right}$.

Если рассмотреть отображение инверсии

$$G\ni g \longmapsto inv(g) = g^{-1} \in G, \tag{2.13}$$

то нетрудно доказать, что оно переводит левоинвариантные поля в правоинвариантные (и обратно) и задает в силу свойства

$$(inv)_*[X,Y] = [inv_* X,\ inv_* Y] \tag{2.14}$$

изоморфизм

$$inv_* : \mathfrak{g}_{left} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{right}. \tag{2.15}$$

Всякое лево- (право-) инвариантное поле X однозначно определяется своим значением $X(1)$ в единице $1\in G$:

$$X(g) = (L_g)_{*,1} X(1), \tag{2.16}$$

или, соответственно,

$$X(g) = (R_g)_{*,1} X(1). \tag{2.16}$$

Таким образом, отображение

$$V_1 : \mathfrak{X}(G) \longrightarrow T_1 G\quad ;\quad V_1(X) = X(1) \tag{2.17}$$

привносит в векторное пространство $T_1 G$ две структуры алгебры Ли:

$$V_1 : \mathfrak{g}_{\substack{left\\(right)}} \xrightarrow{\sim} T_1 G. \tag{2.18}$$

Левая структура алгебры Ли в $T_1 G$ может быть задана другим способом с помощью понятия однопараметрической подгруппы в группе Ли.

6. Однопараметрические подгруппы.

Однопараметрическая подгруппа в группе Ли есть непрерывный гомоморфизм

$$\xi : \mathbb{R} \longrightarrow G, \tag{2.19}$$

который определяет вектор $\xi_{*,0} \in T_1 G$ [касательный вектор к кривой в точке $1=\xi(0)$] и сам однозначно восстанавливается по любому касательному в единице $1\in G$ вектору.

Если теперь векторы $X,Y\in T_1 G$ соответствуют однопараметрическим подгруппам $\xi(t),\eta(t)$, то вектор $[X,Y]\in T_1 G$ (где скобка векторов выражается через скобку полей равенством

$$[X,Y] = V_1([\tilde X,\tilde Y]), \tag{2.20}$$

в котором $\tilde X(g) = (L_g)_{*,1} X$ – левоинвариантное поле, порожденное вектором X), соответствует однопараметрической подгруппе

$$t \longmapsto \xi(\sqrt{t})\eta(\sqrt{t})\xi^{-1}(\sqrt{t})\eta^{-1}(\sqrt{t}). \tag{2.21}$$

Если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задан базис $\{X_i\}_{i=1}^{n}$, то структура этой алгебры определяется так называемыми структурными константами c_{ij}^{k}, $1\le i,j,k\le n$, которые находятся из равенства

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} X_k. \tag{2.22}$$

7. Экспоненциальное отображение. С помощью однопараметрических подгрупп группы Ли определяется экспоненциальное отображение

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G, \tag{2.23}$$

которое задается формулой

$$\exp X = \xi_X(1) \quad ; \; X \in \mathfrak{g} = T_1 G \; . \tag{2.24}$$

где $\xi_X(t)$ – однопараметрическая подгруппа группы G с касательным вектором в единице, равным вектору X.

Заметим, что однопараметрические подгруппы являются интегральными кривыми как лево-, так и правоинвариантных векторных полей и что эти инвариантные поля полны (см. § I, п. I6).

Отображение (2.23) гладко и в некоторой окрестности нуля $0 \in \mathfrak{g}$ является диффеоморфизмом, причем (при отождествлении $\mathfrak{g} = T_1 G$)

$$\exp_{*,1} = id \; . \tag{2.25}$$

Экспоненциальное отображение (2.23) обладает следующими свойствами:

$$\exp 0 = 1 \quad ; \quad \exp(-X) = (\exp X)^{-1} \; ; \tag{2.26}$$

$$\exp(s+t)X = \exp sX \cdot \exp tX \quad ; \quad s,t \in \mathbb{R} \; . \tag{2.27}$$

Отображение $\exp$ устанавливает соответствие между подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и подгруппами группы Ли G, а также между идеалами в $\mathfrak{g}$ и нормальными делителями в G.

Если

$$f : G \longrightarrow H, \tag{2.28}$$

гомоморфизм групп Ли, то

$$f_{*,1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h} \tag{2.29}$$

есть гомоморфизм соответствующих алгебр Ли, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "f_{*,1}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd} \tag{2.30}$$

локальный

Обратно, всякий гомоморфизм алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ порождает некоторый гомоморфизм (2.28) групп Ли такой, что $f_{*,1} = \varphi$.

Вообще, по всякой алгебре Ли восстанавливается некоторая группа Ли, причем однозначно (с точностью до изоморфизма) может быть восстановлена односвязная группа.

8. Присоединенные представления. Если группа G действует

на векторном пространстве V линейными преобразованиями, то говорят, что задано линейное представление группы G в пространстве V.

Всякое линейное представление группы Ли порождает линейное представление соответствующей алгебры Ли (скобке в алгебре Ли переходит в коммутатор операторов).

Группа Ли G действует на себе внутренними автоморфизмами (2.4). Соответствие

$$G \ni g \longmapsto Ad\, g = (\mathrm{Int}\, g)_{*,1} \in GL(\mathfrak{g}) \tag{2.31}$$

определяет линейное представление группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Представление (2.31) называется присоединенным представлением группы G. Дифференциал отображения [гомоморфизма групп Ли] (2.31) представляет собой гомоморфизм алгебр Ли:

$$ad = (Ad)_{*,1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \; , \tag{2.32}$$

который задает представление алгебры Ли на себе, называемое присоединенным представлением алгебры Ли. Для присоединенного представления ad доказывается формула

$$(ad\, X)Y = [X,Y] \quad ; \quad X,Y \in \mathfrak{g} \; . \tag{2.33}$$

Следующая формула связывает представления Ad и ad с экспоненциальным отображением:

$$Ad(\exp X) = \exp(ad\, X) \; ; \; X \in \mathfrak{g} \; . \tag{2.34}$$

9. Формы Маурера-Картана. Определим теперь на группе Ли G каноническим образом две дифференциальные формы со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Правая форма Маурера-Картана $\omega = \omega_{right} \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ определяется формулой

$$\langle \omega(g), X \rangle = (R_{g^{-1}})_{*,g} X \quad ; \quad g \in G, \; X \in T_g G \; , \tag{2.35}$$

т. е. значение формы ω в точке $g \in G$ на касательном векторе X к группе G в этой точке определяется как элемент касательного пространства к группе G в единице $1 \in G$, получающийся правым сдвигом вектора X из точки g в точку I.

Аналогично, но с помощью левых сдвигов определяется левая форма Маурера-Картана ω_{left}.

Формы ω_{right} и ω_{left} – соответственно право- (лево-) инвариантны и удовлетворяют уравнениям Маурера-Картана:

$$d\omega_{right} - \tfrac{1}{2}[\omega_{right}, \omega_{right}] = 0 \; ; \tag{2.36}$$

$$d\omega_{left} + \frac{1}{2}[\omega_{left}, \omega_{left}] = 0. \qquad (2.37)$$

Гладкое отображение $F: G \to H$ из одной группы Ли в другую такое, что $F(1) = 1$, удовлетворяет условию

$$F^* \omega^{(H)}_{\substack{right \\ (left)}} = \omega^{(G)}_{\substack{right \\ (left)}} \qquad (2.38)$$

тогда и только тогда, когда F – гомоморфизм групп Ли.

Важнейшими примерами групп Ли являются матричные группы Ли и прежде всего полная линейная группа $GL(n,K)$, т. е. группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$. Алгеброй Ли группы $GL(n,\mathbb{K})$ является алгебра $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ всех ($n \times n$)-матриц; экспоненциальное отображение представляет собой известный матричный экспоненциал, определяемый с помощью ряда.

§ 3. Фундаментальная группа и накрытия

I. Пути и петли. Символом $P(M)$ мы будем обозначать множество всевозможных кусочно-гладких путей $\psi: [0,1] \to M$ с заданной на этом множестве частичной операцией

$$(\psi_2 \cdot \psi_1)(t) = \begin{cases} \psi_1(2t); & 0 \le t \le 1/2 \\ \psi_2(2t-1); & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}; \quad \psi_1, \psi_2 \in P(M);\ \psi_2(0) = \psi_1(1). \qquad (3.1)$$

В множестве $P(M)$ определена также операция перехода к противоположному пути: $\bar\psi(t) = \psi(1-t)$ и имеются выделенные пути: $\varepsilon_x(t) = x$, $x \in M$, $t \in [0,1]$, которые называются постоянными.

В $P(M)$ рассматриваются подмножества $P(M; x_0, x_1) = \{\psi \in P(M): \psi(0) = x_0, \psi(1) = x_1\}$ путей с фиксированными концами и подмножества замкнутых путей (петель) $\Omega(M, x_0) = P(M; x_0, x_0)$.

Операция (3.I) в множестве $P(M)$ не ассоциативна, а постоянные пути ε_x не являются единичными элементами. Такое положение вещей исправляется факторизацией $P(M)$ по отношению эквивалентности, определяемому гомотопией.

2. Гомотопии. Фундаментальная группа. Универсальное накрывающее многообразие. Два пути $\psi_1, \psi_2 \in P(M; x_0, x_1)$ называются гомотопными, если существует такая непрерывная функция $H: [0,1]^2 \to M$, что $H(t,0) = \psi_1(t)$, $H(t,1) = \psi_2(t)$, и при любом $s \in [0,1]$ получается кусочно-гладкий путь $\psi_s \in P(M; x_0, x_1)$; $\psi_s(t) = H(t,s)$. Фактор-множество множества $P(M; x_0, x_1)$ по отношению гомотопии обозначим $\widetilde{P}(M; x_0, x_1)$. Операция (3.I) порождает операцию умножения гомотопических классов путей, и эта последняя операция уже будет ассоциативной, а классы

путей ε_x будут единицами.

Таким образом, получится категория (группоид), объектами которой являются точки многообразия M, а морфизмами – элементы множества $\widetilde{P}(M; x_0, x_1)$. В частности, профакторизованное множество петель $\widetilde{\Omega}(M, x_0)$ становится группой. Эта группа называется фундаментальной группой многообразия M в точке x_0 и обозначается $\pi_1(M, x_0)$. Если многообразие M связно, то фундаментальные группы в различных его точках изоморфны.

Если зафиксировать точку $x_1 = pt$ (так мы будем обозначать фиксированную отмеченную точку) и рассмотреть множество $\widetilde{M} = \bigcup_{x \in M} \widetilde{P}(M; x, pt)$, то в этом множестве можно ввести топологию и структуру многообразия так, что отображение

$$\pi: \widetilde{M} \longrightarrow M \quad ; \quad \pi([\psi]) = \psi(0), \qquad (3.2)$$

где $[\psi]$ – гомотопический класс пути ψ, будет гладким накрывающим отображением, т. е. у любой точки $x \in M$ найдется такая открытая окрестность U, что отображение (3.2) является диффеоморфизмом на каждой компоненте связности множества $\pi^{-1}(U)$. Многообразие $\widetilde{M}$ называется универсальным накрывающим многообразием многообразия M. Многообразие $\widetilde{M}$ односвязно (т. е. любая петля в нем гомотопна постоянной). За отмеченную точку в $\widetilde{M}$ мы будем принимать гомотопический класс постоянного пути ε_{pt}: $\widetilde{pt} = [\varepsilon_{pt}]$.

Фундаментальная группа $\pi_1(M) (= \pi_1(M, pt))$ действует справа (см. § 2, п. 4) на многообразии $\widetilde{M}$ по следующему закону:

$$(y, \gamma) \longmapsto R_\gamma y = y \cdot \gamma = [\psi \cdot \varphi]\ ;\ y = [\psi] \in \widetilde{M};\ \gamma = [\varphi] \in \pi_1(M). \qquad (3.3)$$

Орбитами действия (3.3) являются слои отображения (проекции) (3.2), т. е. множества вида $\pi^{-1}(x) = \widetilde{P}(M; x, pt)$, в частности

$$\pi \circ R_\gamma = \pi \quad ; \quad \gamma \in \pi_1(M). \qquad (3.4)$$

На каждом слое действие (3.3) свободно, а из того, что π есть накрывающее отображение, следует, что топология в слое дискретна. Мы будем отождествлять фундаментальную группу $\pi_1(M)$ с $\pi_1(M)$ – орбитой отмеченной точки $\widetilde{pt} \in \widetilde{M}$:

$$\pi_1(M) \ni \gamma \longmapsto \widetilde{pt} \cdot \gamma \in \widetilde{M}. \qquad (3.5)$$

Из (3.4) следует:

$$\pi_* \circ (R_\gamma)_* = \pi_* \quad ; \quad (R_\gamma)^* \circ \pi^* = \pi^* \qquad (3.6)$$

где π_* – дифференциал отображения π, а π^* – операция взятия обратного образа дифференциальной формы (см. § I, п. I5).

В силу того, что проекция π есть локальный диффеоморфизм, каждое

$$\pi_{*,y} : T_y\widetilde{M} \longrightarrow T_{\pi(y)}M \ ; \ y\in\widetilde{M} \tag{3.7}$$

есть изоморфизм. Два изоморфизма π_{*,y_1} и π_{*,y_2}, где y_1, y_2 принадлежат одному слою (и, следовательно, существует такой элемент $\gamma\in\pi_1(M)$, что $y_2 = y_1\cdot\gamma$), связаны соотношением

$$\pi_{*,y_1\cdot\gamma} = \pi_{*,y_1}\circ(R_\gamma)^{-1}_{*,y_1} = \pi_{*,y_1}\circ(R_{\gamma^{-1}})_{*,y_2} . \tag{3.8}$$

3. <u>Классификация накрытий</u>. Накрывающее отображение $\pi : \widetilde{M}\to M$, построенное в предыдущем пункте, обладает следующим свойством (за которое ему присвоено название <u>универсального</u>): всякое другое накрывающее отображение $p : \hat{M}\to M$ в случае, если многообразие $\hat{M}$ связно, может быть включено в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{p'} & \hat{M}, \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle p} & \\ M & & \end{array} \tag{3.9}$$

в которой отображение p' также является накрывающим.

Классы эквивалентности связных накрытий [два накрытия $p_i : \hat{M}_i\to M$, $i=1,2$, эквивалентны, если найдется гомеоморфизм $f : \hat{M}_1\to\hat{M}_2$ такой, что $p_1 = p_2\circ f$] находятся во взаимнооднозначном соответствии с классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы $\pi_1(M)$ [две подгруппы $H_1, H_2 \subset \pi_1(M)$ сопряжены, если существует элемент $\gamma\in\pi_1(M)$ такой, что $H_1 = \gamma H_2\gamma^{-1}$].

Явно это соответствие задается следующим образом: подгруппе $H\subset\pi_1(M)$ соответствует накрытие

$$p_{(H)} : \hat{M}_{(H)} \longrightarrow M , \tag{3.10}$$

где $\hat{M}_{(H)} = \widetilde{M}/H$ – фактор-множество множества $\widetilde{M}$ относительно действия (3.3), суженного на подгруппу H, а отображение $p_{(H)}$ есть проекция π, опущенная на фактор. Обратно, всякое накрытие $p:\hat{M}\to M$ получается с помощью описанной процедуры из некоторой подгруппы $H\subset\pi_1(M)$, а именно: надо взять $H = p_*\pi_1(\hat{M}, \hat{pt})$, где $\hat{pt}$ –произвольная точка в слое $p^{-1}(pt)$, а p_* – индуцированный отображением p гомоморфизм фундаментальных групп: $p_* : \pi_1(\hat{M}, \hat{pt}) \longrightarrow \pi_1(M, pt)$.

4. <u>Поднятие путей в накрывающее многообразие</u>. Пусть $p : \hat{M}\to M$ – накрывающее отображение. Всякий путь $\psi\in P(M)$ можно единственным образом накрыть таким путем $\widetilde{\psi}_{y_0}\in P(\hat{M})$, что $p\circ\widetilde{\psi}_{y_0} = \psi$; $\widetilde{\psi}_{y_0}(0) = y_0 \in p^{-1}(\psi(0))$. Произведение (3.I) путей переходит в про-

изведение накрывающих путей:

$$\widetilde{(\psi_2\cdot\psi_1)}_{y_0} = \widetilde{(\psi_2)}_{\widetilde{\psi}_1(1)}\cdot\widetilde{(\psi_1)}_{y_0} \ ; \ \widetilde{(\overline{\psi})}_{\widetilde{\psi}_{y_0}(1)} = \overline{(\widetilde{\psi}_{y_0})} . \tag{3.II}$$

Поднятия путей в универсальное накрывающее многообразие следующим образом связаны с действием (3.3) фундаментальной группы:

$$\widetilde{\psi}_{y_0\cdot\gamma}(t) = \widetilde{\psi}_{y_0}(t)\cdot\gamma \ ; \ y_0\in\widetilde{M} \ , \ \gamma\in\pi_1(M) \ , \ t\in[0,1] . \tag{3.I2}$$

Поднятие пути $\psi\in P(M; pt, x)$ с начальной точкой $y_0 = \widetilde{pt}\in\widetilde{M}$ мы будем обозначать $\widetilde{\psi}$ ($= \widetilde{\psi}_{\widetilde{pt}}$).

Это поднятие можно явно задать формулой $\widetilde{\psi}(t) = [\psi^t]$, где путь $\psi^t\in P(M, \psi(t), pt)$ определяется равенством

$$\psi^t(s) = \overline{((\overline{\psi})_{1-t})}(s) = \psi(1-(1-t)(1-s)) \ ; \ t, s\in[0,1] .$$

Если $\varphi\in\Omega(M, pt)$ есть некоторая петля (замкнутый путь) в точке pt, то путь $\widetilde{\varphi}$ может разомкнуться и не разомкнется, если только φ гомотопен ε_{pt}, в общем же случае

$$\widetilde{\varphi}(1) = [\varphi] , \tag{3.I3}$$

откуда, в частности, следует, что отображение $\Omega(\widetilde{M}, y)\ni\psi \longmapsto \pi\circ\psi\in\Omega(M, \pi(y))$ имеет своим образом множество $\Omega_0(M, \pi(y))$ петель в точке $\pi(y)$, гомотопных тривиальной петле $\varepsilon_{\pi(y)}$ (и является взаимно-однозначным отображением на это множество).

Из (3.II) и (3.I2) следует для $\varphi\in\Omega(M, pt)$

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\varphi}\cdot\gamma , \tag{3.I4}$$

где $\gamma = [\varphi]\in\pi_1(M)$.

5. <u>Поднятие форм и полей</u>. Взяв обратный образ π^*, можно любую дифференциальную форму (или, более общим образом, ковариантное тензорное поле) поднять на универсальное накрывающее многообразие:

$$\Lambda^p(M, V)\ni\alpha \longmapsto \widetilde{\alpha} = \pi^*\alpha\in\Lambda^p(\widetilde{M}, V) . \tag{3.I5}$$

Образ отображения (3.I5) состоит [в силу (3.6)] из $\pi_1(M)$ – инвариантных форм на $\widetilde{M}$, т. е. из таких форм $\omega\in\Lambda^p(\widetilde{M}, V)$, что

$$R^*_\gamma\omega = \omega \ ; \ \gamma\in\pi_1(M) . \tag{3.I6}$$

Другими словами,

$$\mathrm{Im}\,\pi^* = [\Lambda^p(\widetilde{M}, V)]^{\pi_1(M)} , \tag{3.I7}$$

где справа стоит множество инвариантов (см. § 2, п. 4) действия $(\omega,\gamma)\mapsto R^*_\gamma\omega$ группы $\pi_1(M)$ на $\Lambda^p(\widetilde{M}, V)$.

В силу того, что проекция π есть локальный диффеоморфизм каждое отображение (3.7) есть изоморфизм, откуда следует, что (3.II) есть мономорфизм, и (3.I5) задает изоморфизм

$$\pi^{*} : \Lambda^{r}(M,V) \simeq [\Lambda^{r}(\widetilde{M},V)]^{\pi_1(M)} . \qquad (3.18)$$

Тот факт, что π есть локальный диффеоморфизм, позволяет поднимать также и контравариантные векторные поля; при этом устанавливается изоморфизм

$$\pi_{*} : [\mathfrak{X}(\widetilde{M})]^{\pi_1(M)} \simeq \mathfrak{X}(M) , \qquad (3.19)$$

где $[\mathfrak{X}(\widetilde{M})]^{\pi_1(M)} = \{ Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M}) : (R_\gamma)_* Y = Y , \gamma \in \pi_1(M) \}$.

6. Однородные пространства групп Ли по дискретным подгруппам. Пусть G – связная односвязная группа Ли, а Γ – ее дискретная подгруппа. Однородное пространство $M = G/\Gamma$ (состоящее из левых классов смежности $\{g\} = g\Gamma$, $g \in G$) снабжается (в случае произвольной замкнутой подгруппы Γ) топологией и структурой многообразия так, что проекция на фактор

$$\pi : G \longrightarrow M = G/\Gamma \qquad (3.20)$$

представляет собой гладкое открытое отображение. В случае же дискретной подгруппы Γ (3.20) является накрывающим отображением. При этом G отождествляется с $\widetilde{M}$, а Γ - с $\pi_1(M)$. В явном виде отождествление $G \simeq \widetilde{M}$ строится следующим образом: пусть $g \in G$; возьмем произвольный путь $\psi \in P(G; 1, g)$; рассмотрим в M путь $(\pi \cdot \psi)(t) = \psi(t)\Gamma$; поставим в соответствие элементу g гомотопический класс этого пути. Обратное отображение строится с помощью теоремы Стинрода [28, 31] о существовании локального сечения у проекции на фактор. При описанном отождествлении элементы $\gamma \in \Gamma$ будут порождать замкнутые пути в M и, следовательно, элементы группы $\pi_1(M)$. Соответствие $\gamma \longmapsto [\pi \cdot \varphi]$, где $\varphi \in P(G; 1, \gamma)$, есть изоморфизм групп $\Gamma \simeq \pi_1(M)$. Укажем, что в качестве отмеченной точки в однородном пространстве берется $\pi(1) = \{1\} = \Gamma$. Под изложенную схему попадает, в частности, случай, когда $M = G$ есть неодносвязная группа Ли; тогда $G = \widetilde{G}/\pi_1(G)$, где $\widetilde{G}$ – односвязная накрывающая группа, $\pi_1(G)$ – дискретный нормальный делитель в $\widetilde{G}$.

7. Теория, изложенная в пунктах I–4 данного параграфа, имеет параллельное развитие в категории топологических пространств и непрерывных отображений. Так как нам понадобятся лишь гладкие многообразия, то с самого начала мы ограничились данной ситуацией. Это тем более оправдано, поскольку для гладких многообразий определения $\pi_1(M)$ и $\widetilde{M}$ с помощью непрерывных и с помощью кусочно-гладких (или просто гладких) путей эквивалентны.

§ 4. Многообразия линейной связности

I. Линейная связность. Пусть M - C^∞ многообразие. Линейной связностью на M называется операция (ковариантное дифференцирование)

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) , \qquad (4.1)$$

удовлетворяющая следующим требованиям [значение ∇ на упорядоченной паре полей (X , Y) обозначается $\nabla_X Y$] :

$$(i) \quad \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z ; \qquad (4.2)$$

$$(ii) \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y ; \qquad (4.3)$$

$$(iii) \quad \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z ; \qquad (4.4)$$

$$(iv) \quad \nabla_X (fY) = (Xf) Y + f \nabla_X Y , \qquad (4.5)$$

где $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$; $f \in \mathfrak{F}(M)$. Можно сказать, что операция ∇ $\mathfrak{F}(M)$ - линейна по первому (нижнему) аргументу и является дифференцированием по второму аргументу.

В локальных координатах ($x^1, \dots , x^m$) связность может быть задана своими коэффициентами Кристоффеля-Шварца, которые определяются из равенства

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} ; \quad 1 \le i, j \le m . \qquad (4.6)$$

2. Ковариантная производная тензорных полей. Операция взятия ковариантной производной вдоль поля $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \qquad (4.7)$$

продолжается до операции

$$\nabla_X : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M) \qquad (4.8)$$

ковариантного дифференцирования тензорных полей, обладающей следующими свойствами:

$$(i) \quad \nabla_{X+Y} K = \nabla_X K + \nabla_Y K ; \qquad (4.9)$$

$$(ii) \quad \nabla_{fX} K = f \nabla_X K ; \qquad (4.10)$$

(iii) ∇_X сохраняет тип тензорного поля; (4.II)

$$(iv) \quad \nabla_X f = Xf ; \qquad (4.12)$$

$$(v)\qquad \nabla_X(K_1+K_2)=\nabla_X K_1+\nabla_X K_2\ ; \qquad (4.13)$$

$$(vi)\qquad \nabla_X(K_1\otimes K_2)=\nabla_X K_1\otimes K_2+K_1\otimes\nabla_X K_2\ ; \qquad (4.14)$$

$$(vii)\qquad \nabla_X(\mathrm{Contr}\,K)=\mathrm{Contr}(\nabla_X K)\ , \qquad (4.15)$$

где $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$; $f\in\mathcal{F}(M)$; $K,K_1,K_2\in\mathbb{T}(M)$; Contr – произвольное свертывание [см. (I.31)]. Другими словами, перечисленные свойства можно выразить, сказав, что операция ∇_X представляет собой сохраняющее тип тензорных полей и коммутирующее с любыми свертываниями дифференцирование алгебры $\mathbb{T}(M)$. Добавим, что можно рассматривать не только скалярные, но и векторно-значные тензорные поля; при этом если имеется билинейное спаривание (I.81), позволяющее определить произведение (I.82) тензорных полей, то ∇_X действует как дифференцирование и на это произведение:

$$\nabla_X\, b(K_1,K_2)=b(\nabla_X K_1,K_2)+b(K_1,\nabla_X K_2). \qquad (4.14)'$$

3. Ковариантный дифференциал. Наряду с операцией взятия ковариантной производной, которая сохраняет тип тензорных полей, определяется операция взятия ковариантного дифференциала, которая повышает на единицу порядок ковариантности

$$\nabla : T^q_p(M)\longrightarrow T^q_{p+1}(M) \qquad (4.16)$$

и которая определяется формулой

$$(\nabla K)(X_1,\dots,X_{p+1})=(\nabla_{X_{p+1}}K)(X_1,\dots,X_p)\ , \qquad (4.17)$$

где $X_i\in\mathfrak{X}(M)$; $i=1,\dots,p+1$. Из свойств операции ∇_X следует формула

$$(\nabla K)(X_1,\dots,X_{p+1})=\nabla_{X_{p+1}}(K(X_1,\dots,X_p))-\sum_{j=1}^{p}K(X_1,\dots,\nabla_{X_{p+1}}X_j,\dots,X_p). \qquad (4.18)$$

Для ковариантного дифференциала ∇ справедливы те же формулы (4.13) – (4.15), а также (4.14)$'$.

4. Ковариантная производная вдоль кривой. Из свойств операции ∇ вытекает, что значение $(\nabla_X K)(x)$, где $x\in M$, $X\in\mathfrak{X}(M)$, $K\in\mathbb{T}(M)$, зависит только от значения $X(x)\in T_xM$ и от значений поля K в некоторой окрестности точки x. Поэтому определена операция

$$^{(x)}\nabla : T_xM\times\mathbb{T}(U_x)\longrightarrow\mathbb{T}(U_x)\ , \qquad (4.19)$$

где U_x некоторая окрестность точки x. Обратно, операции (4.19) определяют операцию ∇.

Если $\psi : I\to M$ – некоторая регулярная кривая (путь) в многообразии M (т. е. такая кривая, что $\psi_*(t)\neq 0$ для любого $t\in I$), то для векторного поля $X(t)$ вдоль кривой (т. е. $X(t)\in T_{\psi(t)}M$) можно найти векторное поле $\tilde X$ на M, такое, что

$$\tilde X(\psi(t))=X(t)\ ;\ t\in I\ . \qquad (4.20)$$

Это позволяет определить операцию ковариантного дифференцирования для векторных полей вдоль кривой. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ векторные поля вдоль кривой ψ. Тогда $(\nabla_X Y)(t)$ есть векторное поле вдоль ψ, определяемое формулой

$$(\nabla_X Y)(t)=(\nabla_{\tilde X}\tilde Y)(\psi(t))\ ;\ t\in I \qquad (4.21)$$

(определение не зависит от способа продолжения полей).

5. Параллельный перенос. Если в качестве X выбрать поле касательных векторов к кривой ψ [т. е. $X(t)=\psi_*(t)$], то можно определить понятие поля $Y(t)$ вдоль ψ, параллельного относительно связности ∇. Поле $Y(t)$ назовем параллельным, если

$$(\nabla_X Y)(t)\equiv 0\ ;\ X(t)=\psi_*(t)\ ;\ t\in I\ . \qquad (4.22)$$

В координатах, в которых положим $x^i(t)=x^i(\psi(t))$; $X^i(t)=X^i(\psi(t))=\frac{dx^i}{dt}$; $Y^i(t)=Y^i(\psi(t))$, условие параллельности поля Y принимает вид

$$\frac{dY^k}{dt}+\sum_{1\le i,j\le m}\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}Y^j=0\ ;\ k=1,\dots,m. \qquad (4.23)$$

Замечая, что компоненты векторного поля Y удовлетворяют линейной однородной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, приходим к выводу, что корректно определен оператор

$$T_\psi : T_{\psi(0)}M\longrightarrow T_{\psi(1)}M \qquad (4.24)$$

параллельного переноса касательных векторов вдоль кривой $\psi : [0,1]\to M$. Этот оператор определяется как разрешающий оператор системы (4.23) на каждом участке кривой ψ, накрытом некоторой координатной окрестностью, а затем разрешающие операторы "сшиваются" (т. е. применяются последовательно при прохождении последовательных участков кривой). Заметим, что для определения оператора (4.24) регулярность кривой на самом деле не важна.

Операторы T_ψ следующим образом согласованы с операцией умножения путей в $P(M)$ и с операцией взятия обратного пути (см. § 3, п. I):

$$T_{\psi_2\cdot\psi_1}=T_{\psi_2}\cdot T_{\psi_1}\ ;\quad T_{\bar\psi}=(T_\psi)^{-1}\ , \qquad (4.25)$$

если произведение путей ψ_1, ψ_2 определено, т. е. $\psi_2(0)=\psi_1(1)$.

Связность ∇ однозначно определяется заданием операторов параллельного переноса T_ψ, а именно: операция ∇ восстанавливается по (4.24) с помощью формулы

$$(\nabla_X Y)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{T_{\psi_t}^{-1} Y(\psi(t)) - Y(\psi(0))}{t} , \qquad (4.26)$$

где $\psi: I\to M$ – интегральная кривая (см. § I, п. I6) поля X, проходящая через точку x, т. е. $\psi(0)=x$; а кривая $\psi_t : [0,1]\to M$ определяется следующим образом: $\psi_t(s)=\psi(ts)$, $s\in[0,1]$, $t\in I$.

Аналогично тому, как операциям ковариантного дифференцирования векторных полей (4.7) соответствует оператор параллельного переноса (4.24) векторов вдоль кривой, операции (4.8) ковариантного дифференцирования тензорных полей соответствует оператор параллельного переноса тензоров вдоль кривой

$$(T^q_p)_\psi : (T^q_p)_{\psi(0)} M \longrightarrow (T^q_p)_{\psi(1)} M , \qquad (4.26)$$

который на тензоре $K = v_1\otimes\ldots\otimes v_q\otimes w^1\otimes\ldots\otimes w^p \in T^q_p(T_{\psi(0)}M)$ [см. (I.24)] определяется формулой

$$(T^q_p)_\psi K = T_\psi v_1\otimes\ldots\otimes T_\psi v_q \otimes (T^*_\psi)^{-1} w^1\otimes\ldots\otimes (T^*_\psi)^{-1} w^p , \qquad (4.27)$$

т. е. на векторах действие задается операторами (4.24), а на ковекторах-контраградиентными операторами

$$(T^*_\psi)^{-1} : T^*_{\psi(0)} M \longrightarrow T^*_{\psi(1)} M . \qquad (4.28)$$

6. <u>Постоянные тензорные поля</u>. Тензорное поле $K\in\mathbb{T}(M)$ называется <u>постоянным</u> (или <u>самопараллельным</u>) в смысле связности ∇, если

$$\nabla K = 0 \qquad (4.29)$$

или, эквивалентно,

$$\nabla_X K = 0 \qquad (4.30)$$

для любого векторного поля $X\in\mathfrak{X}(M)$.

Доказывается, что условие постоянства тензорного поля эквивалентно равенству

$$(T^q_p)_\psi K(\psi(0)) = K(\psi(1)) \qquad (4.31)$$

для любой кривой ψ, которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$(T^q_p)_\psi K(\psi(0)) = K(\psi(0)) \qquad (4.32)$$

для любой замкнутой кривой ψ'.

7. <u>Группа голономии</u>. Операторы параллельного переноса (4.24) вдоль всевозможных петель (замкнутых кривых) ψ с началом и концом в отмеченной точке $pt\in M$ образуют представление

$$\Omega(M, pt) \ni \psi \longmapsto T_\psi \in GL(T_{pt}M) \qquad (4.33)$$

множества петель $\Omega(M, pt)$ с операцией умножения § 3, п. I в группу $GL(T_{pt}M)$ обратимых операторов, действующих в касательном пространстве $T_{pt}M$. Образ отображения (4.33) есть подгруппа Ли в группе $GL(T_{pt}M)$, которая называется <u>группой голономии</u> связности ∇ в точке $pt\in M$ и обозначается $HL(M,\nabla, pt)$.

Заметим, что обычно при определении группы голономии в касательном пространстве $T_{pt}M$ выбирается некоторый базис, после чего группа голономии может быть отождествлена с подгруппой Ли в матричной группе $GL(m,\mathbb{R})$. Мы не будем выбирать базис и будем считать элементы группы HL операторами в $T_{pt}M$.

Группа $HL(M,\nabla, pt)$ естественно действует на пространстве $T_{pt}M$, и, следовательно, задано ее действие и на тензорной алгебре $\mathbb{T}_{pt}(M)=\mathbb{T}(T_{pt}M)$ [см. формулу (4.27)].

Если сузить отображение (4.33) на множество $\Omega_0(M,pt)$ петель в точке pt, гомотопных постоянной петле ε_{pt}, то образ этого отображения определит подгруппу $HL_0(M,\nabla,pt)$ группы $HL(M,\nabla,pt)$, которая называется <u>ограниченной группой голономии</u> связности ∇ в точке pt и представляет собой компоненту единицы в группе Ли $HL(M,\nabla,pt)$. Имеется естественный гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M, pt)$ многообразия M на фактор-группу $HL(M,\nabla,pt)/HL_0(M,\nabla,pt)$.

Если многообразие M односвязно, то для него $HL = HL_0$.

С помощью действия группы голономии $HL = HL(M,\nabla, pt)$ на $\mathbb{T}_{pt}(M)$ можно определить условие постоянства тензорного поля: тензор $K_0\in\mathbb{T}_{pt}(M)$ порождает постоянное тензорное поле тогда и только тогда, когда он HL-инвариантен, т. е.

$$K_0 \in [\mathbb{T}_{pt}(M)]^{HL} . \qquad (4.34)$$

8. <u>Тензоры кручения и кривизны</u>. По связности ∇ естественным образом определяются тензорные поля <u>кручения</u> $\mathrm{Tor}\in T^1_2(M)$ и <u>кривизны</u> $\mathrm{Curv}\in T^1_3(M)$:

$$\mathrm{Tor}(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] ; \qquad (4.35)$$

$$\mathrm{Curv}(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]} Z , \qquad (4.36)$$

где $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$, причем в правой части (4.36) стоит коммутатор $[\nabla_X,\nabla_Y]$ операций ∇_X и ∇_Y; $\mathrm{Curv}(X, Y)$ можно рассматривать как оператор из $\mathfrak{X}(M)$ в $\mathfrak{X}(M)$, и $\mathrm{Curv}(X,Y)Z$ есть значение этого оператора на поле Z [см. формулу (I.19)].

Связная группа Ли $\mathrm{Hl}_0(M,\nabla,pt)$ определяется своей алгеброй Ли $\mathfrak{hl}(M,\nabla,pt)$, которая называется алгеброй голономии. Известно описание алгебры $\mathfrak{hl}$ с помощью тензора кривизны (теорема Амброза - Зингера, см. [34]).

9. Геодезические и экспоненциальное отображение. Кривая ψ в многообразии M называется геодезической связности ∇, если

$$(\nabla_{\psi_*}\psi_*)(t) = 0\,, \tag{4.37}$$

или, эквивалентным образом, если

$$T_{\psi_t}\psi_*(0) = \psi_*(t)\ ; \quad \psi_t(s) = \psi(ts)\ , \ s\in[0,1]\,. \tag{4.38}$$

Через каждую точку $x\in M$ можно провести единственную геодезическую $\psi : I\to M$, $\psi(0)=x$, определенную на некотором максимальном интервале I и имеющую в точке x касательный вектор $\psi_*(0)\in T_x M$, равный любому наперед заданному вектору $X\in T_x M$.

Эту геодезическую мы будем обозначать $\psi_{x,X}(t)$, так что

$$\psi_{x,X}(0) = x\ ; \quad (\psi_{x,X})_*(0) = X\,. \tag{4.39}$$

Таким образом, с помощью формулы

$$\mathrm{Exp}_x(X) = \psi_{x,X}(1) \tag{4.40}$$

можно определить отображение

$$\mathrm{Exp}_x : V \longrightarrow M\,, \tag{4.41}$$

заданное в некоторой окрестности V нуля в пространстве $T_x M$. Отображение (4.41) является диффеоморфизмом на некоторую окрестность точки x в многообразии M, причем

$$(\mathrm{Exp}_x)_{*,0} = id_{T_x M}\,. \tag{4.42}$$

Линейная связность ∇ называется полной, если отображение Exp_x определено на всем касательном пространстве $T_x M$, т.е. любая геодезическая неограниченно продолжаема.

Геодезическая $\psi_{x,X}(t)$, определенная начальными условиями (4.39), может быть выражена с помощью экспоненциального отображения следующей формулой:

$$\psi_{x,X}(t) = \mathrm{Exp}_x\, tX\,. \tag{4.43}$$

10. Аффинные отображения. Если задано гладкое отображение $f : M_1 \to M_2$ двух многообразий линейной связности (со связностями $\nabla^{(1)}$ и $\nabla^{(2)}$ и параллельными переносами $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$, соответственно), то f называется аффинным отображением, если для любой кривой $\psi : [0,1] \to M_1$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{\psi(0)}M_1 & \xrightarrow{f_{*,\psi(0)}} & T_{(f\cdot\psi)(0)}M_2 \\ {\scriptstyle T^{(1)}_{\psi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{(2)}_{f\cdot\psi}} \\ T_{\psi(1)}M_1 & \xrightarrow{f_{*,\psi(1)}} & T_{(f\cdot\psi)(1)}M_2 \end{array}\ , \tag{4.44}$$

т. е. для любого вектора $X\in T_{\psi(0)}M$ справедливо

$$f_{*,\psi(1)}T^{(1)}_{\psi}X = T^{(2)}_{f\cdot\psi}f_{*,\psi(0)}X\,. \tag{4.45}$$

Если в качестве ψ взять геодезическую многообразия $(M_1, \nabla^{(1)})$, а в качестве X - ее начальный касательный вектор: $X = \psi_*(0)$, то с учетом (4.38) получим из (4.45) $(f\cdot\psi)_*(t) = T^{(2)}_{(f\cdot\psi)_t}\cdot(f\cdot\psi)_*(0)$, что означает, что кривая $f\cdot\psi$ является геодезической многообразия $(M_2, \nabla^{(2)})$. Таким образом, аффинное отображение переводит геодезические в геодезические. В терминах экспоненциального отображения это может быть выражено следующим образом: геодезическая $\psi(t) = \mathrm{Exp}^{(1)}_{pt_1} tX$, начинающаяся в отмеченной точке $pt_1\in M_1$, с начальным касательным вектором X переходит в геодезическую $(f\cdot\psi)(t) = \mathrm{Exp}^{(2)}_{pt_2} tf_{*,pt_1}(X)$, начинающуюся в точке $pt_2 = f(pt_1)\in M_2$, с начальным касательным вектором $f_{*,pt_1}(X)$. Таким образом,

$$f(\mathrm{Exp}^{(1)}_{pt_1} tX) = \mathrm{Exp}^{(2)}_{pt_2}(tf_{*,pt_1}(X))\,. \tag{4.46}$$

В равенстве (4.46) вектор X произволен, а t достаточно мало. Можно, однако, положить $t=1$, считая достаточно малым X. Тогда получится

$$(f\cdot \mathrm{Exp}^{(1)}_{pt_1})X = (\mathrm{Exp}^{(2)}_{pt_2}\cdot f_{*,pt_1})X \tag{4.47}$$

для векторов $X\in T_{pt_1}M_1$, входящих в область определения $\mathrm{Exp}^{(1)}_{pt_1}$.

Аффинные отображения обладают следующим свойством: если векторные поля $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M_1)$ f- связаны (см. § I, п. I5) с векторными полями $X',Y',Z'\in\mathfrak{X}(M_2)$, соответственно, и отображение f - аффинно, то f - связаны также и следующие пары векторных полей: (i) $\nabla^{(1)}_X Y$ и $\nabla^{(2)}_{X'}Y'$; (ii) $\mathrm{Tor}^{(1)}(X,Y)$ и $\mathrm{Tor}^{(2)}(X',Y')$; (iii) $\mathrm{Curv}^{(1)}(X,Y)Z$ и $\mathrm{Curv}^{(2)}(X',Y')Z'$. Свойство (i) является характеристическим для аффинных диффеоморфизмов, т. е. диффеоморфизм $f: M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ является аффинным отображением тогда и только тогда, когда

$$f_*(\nabla^{(1)}_X Y) = \nabla^{(2)}_{f_*X} f_*Y. \qquad (4.48)$$

Еще одно важное свойство аффинных отображений: два аффинных отображения $f_1, f_2 : M_1 \to M_2$, совпадающие вместе со своими дифференциалами в некоторой точке (т. е. $f_1(pt_1)=f_2(pt_1)$, $(f_1)_{*,pt_1} = (f_2)_{*,pt_1}$), совпадают тождественно на всем связном многообразии M_1.

Для множества аффинных отображений из $(M_1, \nabla^{(1)})$ в $(M_2, \nabla^{(2)})$ мы примем обозначение $Aff(M_1, \nabla^{(1)}; M_2, \nabla^{(2)})$ и $Aff_0(M_1, \nabla^{(1)}; M_2, \nabla^{(2)})$ – для множества аффинных отображений, сохраняющих отмеченные точки.

II. Римановы связности. Римановым многообразием называется многообразие M с заданным на нем симметрическим тензорным полем $g \in T^0_2(M)$, таким, что в каждой точке $x \in M$ значение $g(x)$ этого тензорного поля представляет собой невырожданную положительно определенную билинейную форму на пространстве $T_xM \times T_xM$.

На каждом римановом многообразии существует единственная линейная связность ∇ (которая называется связностью Леви-Чевита), удовлетворяющая следующим условиям:

(i) тензор кручения $Tor = 0$;

(ii) $\langle g(\psi(1)) : T_\psi X, T_\psi Y\rangle = \langle g(\psi(0))\,;\, X, Y\rangle$ для любой кривой ψ и для любых касательных векторов $X, Y \in T_{\psi(0)} M$.

Риманова метрика g определяет метрику $dist(x,y)$ для точек многообразия M:

$$dist(x,y) = \inf_\psi L(\psi), \qquad (4.49)$$

где inf берется по всем кривым $\psi : [a,b] \to M$, таким, что $\psi(a)=x$, $\psi(b)=y$, а $L(\psi)$ есть длина кривой, определяемая формулой

$$L(\psi) = \int_a^b \langle g(\psi(t)); \psi_*(t), \psi_*(t)\rangle^{1/2} dt. \qquad (4.50)$$

Связность Леви-Чевита ∇ полна тогда и только тогда, когда метрическое пространство $(M, dist)$ полно.

Если (M, g) – полное риманово многообразие, то отображение Exp_x сюръективно, где Exp_x понимается в смысле связности Леви-Чевита.

I2. Параллелизованные многообразия. Многообразие абсолютного параллелизма (или параллелизованное многообразие) – это многообразие, на котором задан набор

$$\Pi = \{X_1, \dots, X_m\}; \quad X_i \in \mathfrak{X}(M), \; i=1,\dots,m \qquad (4.51)$$

векторных полей, линейно независимых в каждой точке многообразия M. Другими словами, Π есть базис пространства $\mathfrak{X}(M)$ над кольцом $\mathfrak{F}(M)$, и любое векторное поле $X \in \mathfrak{X}(M)$ может быть разложено по этому базису:

$$X = \sum_{i=1}^m \xi^i(X) X_i. \qquad (4.52)$$

Коэффициенты $\xi^i(X) \in \mathfrak{F}(M)$ разложения (4.52) называются компонентами поля X относительно Π. В терминах компонент определяется (m -мерное) векторное пространство постоянных полей:

$$\mathfrak{X}_{const}(M,\Pi) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \xi^i(X) = const\;;\; i=1,\dots,m\}. \qquad (4.53)$$

Символом c^k_{ij} будут обозначаться структурные функции многообразия (M, Π), которые определяются из равенства

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c^k_{ij} X_k\;; \quad c^k_{ij} \in \mathfrak{F}(M). \qquad (4.54)$$

В пространстве $\Lambda^1(M)$ дифференциальных форм рассматривается дуальный базис

$$\Pi' = \{\omega^1, \dots, \omega^m\}\;; \quad \langle \omega^i, X_j\rangle = \delta^i_j. \qquad (4.55)$$

Тензорное поле $K \in \mathfrak{T}(M)$ называется постоянным в смысле параллелизма Π, если компоненты K относительно базисов Π, Π' постоянны.

Абсолютный параллелизм Π определяет на M несколько типов линейных связностей (см. [3]). Мы рассмотрим простейшую из них (прямую связность в терминологии [3]), задаваемую условием

$$\nabla^{(\Pi)}_{X_i} X_j = 0 \;; \quad 1 \le i,j \le m. \qquad (4.56)$$

Из (4.56) следует в силу свойств оператора ∇ (см. п. I)

$$\nabla^{(\Pi)}_X Y = 0 \;; \quad X \in \mathfrak{X}(M),\; Y \in \mathfrak{X}_{const}(M,\Pi), \qquad (4.57)$$

а в силу определения тензоров кручения и кривизны (см. п. 8) получим

$$Curv(X,Y)Z = 0 \;; \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M); \qquad (4.58)$$

$$Tor(X,Y) = -[X,Y]\;; \quad X,Y \in \mathfrak{X}_{const}(M,\Pi). \qquad (4.59)$$

Обращаем внимание на различие в требованиях на поля в формулах (4.58) и (4.59), связанное с нетензорным характером правой части (4.59).

Оператор T_ψ параллельного переноса в смысле связности $\nabla^{(\Pi)}$ не зависит от вида кривой ψ и определяется только ее концами:

$$T_{\gamma} = T_{x,y} \quad ; \quad x = \gamma(0)\ ,\ y = \gamma(1)\ ; \qquad (4.60)$$

вектор переносится так, что остаются неизменными его компоненты относительно Π.

Группа голономии связности $\nabla^{(\Pi)}$ тривиальна.

Тензорное поле $K \in \mathcal{T}(M)$ постоянно в смысле связности $\nabla^{(\Pi)}$ тогда и только тогда, когда оно постоянно в смысле параллелизма Π.

Геодезическими связности $\nabla^{(\Pi)}$ являются интегральные кривые постоянных векторных полей. В частности многообразие $(M, \nabla^{(\Pi)})$ полно в том и только том случае, когда полны все поля $X \in \mathcal{X}_{const}(M, \Pi)$ (см. § I, п. I6).

I3. Абсолютный параллелизм на группах Ли. На группе Ли G определены два абсолютных параллелизма Π_{left} и Π_{right}, для которых пространства (4.53) постоянных полей составлены из лево- и правоинвариантных полей (см. § 2, п. 5), соответственно. Оба этих пространства представляют собой алгебры Ли, структурные функции c^k_{ij} этих параллелизмов постоянны и есть (для Π_{left}) не что иное, как структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{X}_{left}(G) = \mathcal{X}_{const}(G, \Pi_{left})$.

Оператор параллельного переноса (4.60) [в смысле, например, Π_{right}] представляет собой дифференциал правого сдвига

$$T_{g_1, g_2} = (R_{g_1^{-1} g_2})_{*, g_1} : T_{g_1}G \to T_{g_2}G \quad ; \quad g_1, g_2 \in G\ . \qquad (4.61)$$

Постоянными тензорными полями на группе Ли G являются право- или лево- (в зависимости от параллелизма) инвариантные тензорные поля.

Геодезическими как левого, так и правого параллелизмов, проходящими через $1 \in G$, являются однопараметрические подгруппы группы Ли (см. § 2, п. 6). Левый и правый экспоненциалы в точке $1 \in G$ совпадают с экспоненциальным отображением (2.24). Оба параллелизма полны.

§ 5. Теорема Фробениуса

Пусть E, F – конечномерные векторные пространства. Рассмотрим в открытом подмножестве $U \subset E \times F$ дифференциальное уравнение

$$dy = \sum_{i=1}^{m} f_i(x,y)\, dx^i \quad ; \quad m = \dim E\ , \qquad (5.1)$$

или, эквивалентно, систему

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = f_i(x,y) \quad ; \quad i = 1, \dots, m\ , \qquad (5.1)'$$

где $f_i(x,y)$ достаточно гладкие функции, заданные на U, со значениями в пространстве F.

Уравнение (5.I) [или (5.I)′] называется вполне интегрируемым на множестве U, если для любой точки $(x_0, y_0) \in U$ найдется решение $y = \varphi(x)$ уравнения (5.I), определенное в некоторой окрестности V точки x_0 и удовлетворяющее условию

$$\varphi(x_0) = y_0\ . \qquad (5.2)$$

Необходимое условие полной интегрируемости (5.I) получается, если воспользоваться свойством $d^2 = 0$ внешнего дифференциала (или, для (5.I)′, эквивалентным равенством $\partial^2 y/\partial x^i \partial x^j = \partial^2 y/\partial x^j \partial x^i$) и расписать внешний дифференциал правой части (5.I) с учетом самого соотношения (5.I).

Получим:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} + \frac{\partial f_j}{\partial y^k} f_i^k = \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_i}{\partial y^k} f_j^k\ , \qquad (5.3)$$

где $y = (y^1, \dots, y^n)$; $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^n)$; $n = \dim F$.

Содержание теоремы Фробениуса состоит в том, что условие (5.3) не только необходимо, но также и достаточно для полной интегрируемости уравнения (5.I).

Вполне интегрируемое д. у. (5.I) можно решать вдоль путей в E, причем результат (т. е. значение решения в конце пути) будет зависеть только от гомотопического класса пути.

Теорема Фробениуса обобщается на так называемые системы Пфаффа на многообразии.

Системой Пфаффа ранга p на многообразии M называется подпространство $\mathfrak{P}$ пространства $\Lambda^1(M)$ дифференциальных форм на многообразии M, обладающее следующими свойствами: (i) – подпространство $\mathfrak{P}$ устойчиво относительно взятия локально конечных сумм и умножения на функции; (ii) – для любой точки $x \in M$ подпространство $\mathfrak{P}_x = \{\alpha(x) : \alpha \in \mathfrak{P}\} \subset T^*_x M$ имеет размерность p.

Двойственным понятию системы Пфаффа является понятие дифференциальной системы Q на многообразии M. Дифференциальная система размерности q на M – это подпространство $Q \subset \mathcal{X}(M)$, удовлетворяющее условиям: (i) – Q устойчиво относительно локально конечных сумм и умножения на функции; (ii) – для любой точки $x \in M$ подпространство $Q_x = \{X(x) : X \in Q\} \subset T_x M$ имеет размерность

q.

Если $\mathcal{P}$ -система Пфаффа ранга p, то $Q=\mathcal{P}^{\perp}=\{X\in\mathfrak{X}(M): \langle\alpha, X\rangle=0\ \alpha\in\mathcal{P}\}$ есть дифференциальная система размерности $q=m-p$, где $m=\dim M$. И, аналогично, обратно: если Q - дифференциальная система размерности q, то $\mathcal{P}=Q^{\perp}=\{\alpha\in\Lambda^1(M): \langle\alpha, X\rangle=0, X\in Q\}$ есть система Пфаффа ранга $p=m-q$.

Дифференциальное уравнение (5.I), как легко видеть, определяет систему Пфаффа ранга n на $V\subset E\times F$, а именно: $\mathcal{P}$ есть подпространство в $\Lambda^1(U)$, порожденное I-формами

$$\omega^k=dy^k-\sum_{i=1}^{m} f_i^k(x,y)\,dx^i \quad ; \ k=1,\dots,n. \qquad (5.4)$$

<u>Интегральным многообразием</u> системы Пфаффа $\mathcal{P}$ называется отображение $\varphi: N\to M$ многообразия N размерности $m-p$ в многообразие M, такое, что

$$\varphi^*\alpha = 0 \qquad (5.5)$$

для любой формы $\alpha\in\mathcal{P}$.

Интегральное многообразие дифференциальной системы Q определяется аналогично, только (5.5) заменяется на

$$\varphi_{*,y}(T_y N)=Q_{\varphi(y)} \quad ; \ y\in N. \qquad (5.6)$$

Отображение $\varphi: N\to M$ является интегральным многообразием системы Пфаффа $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда это отображение является интегральным многообразием для дифференциальной системы $Q=\mathcal{P}^{\perp}$.

В примере, с которого мы начинали параграф, решение $y=\varphi(x)$ является интегральным многообразием ($N=V\subset E$) системы Пфаффа, порожденной формами $\{\omega^k\}_{k=1}^{n}$. И обратно, по всякому интегральному многообразию $\varphi: N\to U$ в окрестности точки $(x_0,y_0)\in U$ локально однозначно восстанавливается интегральное многообразие специального вида $\varphi: V\to U$, где V - окрестность x_0 в E, а интегральные многообразия такого вида есть не что иное, как решения (5.I).

Система Пфаффа $\mathcal{P}$ (дифференциальная система Q) называется <u>интегрируемой</u>, если для каждой точки $x\in M$ существует интегральное многообразие, проходящее через точку x.

Система Пфаффа $\mathcal{P}$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема соответствующая дифференциальная система $Q=\mathcal{P}^{\perp}$.

<u>Теорема Фробениуса</u>. Каждое из следующих утверждений эквивалентно интегрируемости системы Пфаффа $\mathcal{P}$ ранга p (или же двойственной дифференциальной системы $Q=\mathcal{P}^{\perp}$ размерности $q=m-p$):

(i) - для любой точки $x_0\in M$ найдется такая координатная окрестность U, что векторные поля $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^{q}$ порождают Q_x, $x\in U$;

(ii) - то же самое, только дифференциальные формы dx^i, $i=q+1,\dots,m$, порождают $\mathcal{P}_x$ [заметим, что в случаях (i), (ii) интегральные подмногообразия выделяются уравнениями $x^i=0$, $i=q+1,\dots,m$;

(iii) - дифференциальная система Q <u>инволютивна</u>, т. е. для любых двух полей $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, таких, что $X(x), Y(x)\in Q_x$, $x\in M$, скобка этих полей $[X,Y]$ обладает тем же свойством;

(iv) - подпространство $d\mathcal{P}\subset\Lambda^2(M)$ содержится в идеале внешней алгебры $\Lambda(M)$, порожденном подпространством $\mathcal{P}\subset\Lambda^1(M)$;

(v) - для любых форм $\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathcal{P}$, имеет место равенство

$$d\alpha\wedge\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_p=0; \qquad (5.7)$$

(vi) - если $\{\omega^k\}_{k=q+1}^{m}$ - формы, порождающие систему $\mathcal{P}$ над некоторым открытым множеством $V\subset M$, то найдутся формы $\alpha_j^k\in\Lambda^1(V)$, такие, что

$$d\omega^k=\sum_{j=q+1}^{m}\alpha_j^k\wedge\omega^j. \qquad (5.8)$$

Отметим, что всякая дифференциальная система размерности I (или, эквивалентно, всякая система Пфаффа ранга $m-1$) интегрируема.

Рассмотрим пример дифференциальной системы Q, которая порождается некоторой дифференциальной формой ω степени I со значениями в конечномерном векторном пространстве E:

$$Q_x=\{X\in T_xM: \langle\omega(x), X\rangle=0\}. \qquad (5.9)$$

Предположим, что выполнены следующие условия: I) значение $\omega(x)$ формы ω в точке $x\in M$ есть сюръективное отображение $\omega(x): T_xM\to E$; 2) размерность ядра $Ker\,\omega(x)=Q_x$ постоянна.

Тогда интегрируемость системы Q эквивалентна следующему утверждению:

(vii) - существует дифференциальная форма α на M степени I со значениями в алгебре $\mathfrak{gl}(E)$ линейных операторов в пространстве E, такая, что

$$d\omega=\alpha\wedge\omega. \qquad (5.10)$$

Заметим, что если дифференциальная система Q задана на произведении многообразий $M_1 \times M_2$, причем отображение

$$T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \supset Q_{(x_1,x_2)} \xrightarrow{(pr_1)_*} T_{x_1}M_1 \tag{5.II}$$

представляет собой изоморфизм, то интегральные многообразия, проходящие через $(x_1,x_2) \in M_1 \times M_2$, могут быть выбраны в виде

$$M_1 \supset V \xrightarrow{\varphi=(id,f)} M_1 \times M_2 \quad , \tag{5.I2}$$

где

$$f = pr_2 \circ \varphi : M_1 \longrightarrow M_2 \tag{5.I3}$$

- отображение, удовлетворяющее условию

$$f(x_1) = x_2 \tag{5.I4}$$

(сравните со случаем дифференциальной системы, соответствующей уравнению (5.I).

ГЛАВА I

Л.Д.У. НА МНОГООБРАЗИЯХ. ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ

§ I. Л.д.у. на $\mathbb{R}^1$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (в классической терминологии: систему л.д.у.).

$$\frac{df}{dt} = \alpha(t) f \quad , \tag{I.I}$$

где $\alpha(t)$ - данная функция, определенная на числовой оси $\mathbb{R}^1$ и принимающая значения в алгебре матриц $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$); f - неизвестная функция со значениями в векторном пространстве $\mathbb{K}^n$.

Известно, что непрерывность функции $\alpha(t)$ обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши с условием

$$f(t_0) = f_0 \tag{I.2}$$

для уравнения (I.I).

Подобные же слова можно сказать и о матричном уравнении

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha(t)\Phi \ , \tag{I.3}$$

соответствующем векторному уравнению (I.I). Причем из обратимости начального значения

$$\Phi(t_0) = \Phi_0 \tag{I.4}$$

следует обратимость решения $\Phi(t)$ в любой точке t.

Мы будем чаще всего считать $t_0 = 0$ и решение уравнения (I.3) с начальным условием

$$\Phi(0) = 1 \ , \tag{I.5}$$

где 1 - единичная матрица из $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, будем называть фундаментальным решением уравнения (I.3) и обозначать Φ_α.

Функция $\Phi_\alpha(t)$ принимает значения в группе обратимых матриц $GL(n,\mathbb{K})$. Всякое решение (I.3) [соответственно (I.I)] может быть представлено в виде

$$\Phi(t) = \Phi_\alpha(t)\Phi(0) \tag{I.6}$$

[соответственно,

$$f(t) = \Phi_\alpha(t) f(0) \quad]. \tag{I.7}$$

Придадим уравнению (I.3), неизвестную функцию Φ в котором будем с этого момента всегда считать обратимо-значной, другую форму, переписав его в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} \cdot \Phi^{-1} = \alpha(t) \ . \tag{I.8}$$

Здесь Φ понимается как отображение

$$\Phi : \mathbb{R}^1 \to GL(n,\mathbb{K}), \tag{I.9}$$

т. е. как кривая в группе Ли $GL(n,\mathbb{K})$.

Производная $\frac{d\Phi}{dt}$ представляет собой касательный вектор к этой кривой в точке $\Phi(t)$ и может быть обозначена $\Phi_*(t)$ [см. § 0.I, п. 3] :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi_*(t) = \Phi_{*,t}\left(\frac{d}{dt}\right) \in T_{\Phi(t)}GL(n,\mathbb{K}) \ . \tag{I.10}$$

Умножение справа на элемент группы Ли определяет отображение правого сдвига, дифференциал которого действует на касательные векторы к группе Ли. Если в уравнении (I.8) производную интерпретировать в смысле (I.10), то умножение справа на $\Phi^{-1}(t)$ надо понимать как правый сдвиг касательного вектора из точки $\Phi(t)$ в точку 1, т. е. как оператор

$$(R_{\Phi^{-1}(t)})_{*,\Phi(t)} : T_{\Phi(t)}GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow T_1 GL(n,\mathbb{K}) \ .$$

Заметим, что $R_{\Phi^{-1}(t)} = (R_{\Phi(t)})^{-1}$, и поэтому

$$(R_{\Phi^{-1}(t)})_{*,\Phi(t)} = (R^{-1}_{\Phi(t)})_{*,\Phi(t)} = ((R_{\Phi(t)})_{*,1})^{-1}. \tag{I.II}$$

Итак, левая часть уравнения (I.8) представляет собой касательный вектор к группе Ли $GL(n,\mathbb{K})$ в единице 1 этой группы.

При отождествлении касательного пространства $T_1 GL(n,\mathbb{K})$ с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ получаем, что левая часть (I.8) принадлежит этой алгебре Ли (так же, как и правая часть).

Вернемся к исходному (векторному) уравнению (I.I). Его можно переписать в виде

$$df = (\alpha(t)dt)f \tag{I.I2}$$

и понимать $\alpha = \alpha(t)dt$ как дифференциальную форму степени I на многообразии $\mathbb{R}^1$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Левая часть (I.I2) представляет собой дифференциал векторной функции $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{K}^n$, т. е. векторно-значную дифференциальную форму

$$df = \left(\frac{df}{dt}\right)dt \in \Lambda^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{K}^n).$$

В правой части уравнения (I.I2) стоит произведение матричной I-формы α на векторно-значную функцию (0 – форму) f.

Аналогичным образом можно переписать матричное уравнение (I.3). При этом придется, однако, считать, что Φ принимает значения в векторном пространстве $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, в которое группа $GL(n,\mathbb{K})$ вложена. Если же мы не хотим выходить за пределы группы Ли $GL(n,\mathbb{K})$, то надо сначала перейти к форме записи (I.8), а уже потом переписать уравнение в виде

$$d\Phi \cdot \Phi^{-1} = \alpha(t)dt. \tag{I.I3}$$

В уравнении (I.I3) $d\Phi$ – это уже не дифференциальная форма, а дифференциал отображения (I.9), т. е. $\Phi_{*,t}$ (см. § 0.I, п. I5). Дифференциальную форму со значениями в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ представляет собой вся левая часть в целом.

Для л. д. у. (I.3) мы канонизируем форму записи

$$d\Phi \cdot \Phi^{-1} = \alpha, \tag{I.I4}$$

где $\alpha = \alpha(t)dt$, ибо в таком виде становится возможным обобщение на случай уравнений для функций со значениями в произвольной группе Ли, а не только со значениями в полной линейной группе $GL(n,\mathbb{K})$ или какой-либо ее подгруппе.

В самом деле, пусть A – произвольная группа Ли и пусть $\mathfrak{a}$ ее алгебра Ли, которую мы будем отождествлять с пространством левоинвариантных векторных полей на A, или же с касательным пространством $T_1 A$ в единице $1 \in A$ (см. § 0.2, п. 5).

Определим отображение

$$D: C^\infty(\mathbb{R}^1, A) \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{a}) \tag{I.I5}$$

множества (группы) гладких функций на $\mathbb{R}^1$ со значениями в

группе Ли A в пространство дифференциальных форм степени 1 на $\mathbb{R}^1$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ формулой

$$\left\langle (D\Phi)(t), \frac{d}{dt} \right\rangle = (R_{\Phi^{-1}(t)})_{*,\Phi(t)} \Phi_{*,t}\left(\frac{d}{dt}\right) = (R_{\Phi^{-1}(t)})_{*,\Phi(t)} \Phi_*(t). \tag{I.I6}$$

Тогда уравнение

$$D\Phi = \alpha \tag{I.I7}$$

будет обобщением уравнения (I.I4).

<u>Замечание I.I.</u> Уравнение (I.3), переписанное в виде (I.I3) [и тем более уравнение (I.I7)] уже нельзя, строго говоря, называть линейным, ибо сама область значений неизвестной функции – группа Ли – уже является нелинейным объектом. Однако, если A – линейная группа Ли [т. е. подгруппа Ли в группе $GL(n,\mathbb{K})$], то название законно, поскольку от формы (I.I3) можно вернуться к (I.3). В общем же случае мы, если будем называть уравнение (I.I7) линейным, то это должно рассматриваться как некоторая "вольность речи".

Оператор D, определенный равенством (I.I6), будем называть <u>мультипликативным дифференциалом</u>. Решение же $\Phi(t,t_0)$ уравнения (I.I7), удовлетворяющее начальному условию

$$\Phi(t_0,t_0) = 1, \tag{I.I8}$$

мы будем называть <u>мультипликативным интегралом</u> и обозначать следующим образом:

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt = \Phi(t,t_0). \tag{I.I9}$$

Теорема существования решения задачи (I.I7), (I.I8), а также теорема единственности для этого решения хорошо известны для случая линейного уравнения (т. е. для случая, когда группа Ли A линейна). Для общего уравнения теорема единственности будет доказана в § 3, а теорема существования – в § 4 (причем, в значительно более общей ситуации – для уравнений на многообразиях).

Уравнение (I.I7) хотя и не может быть, строго говоря, названо линейным, обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам л. д. у. В частности, легко (с использованием свойств оператора D – см. § 3) доказать равенство

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,t_0), \tag{I.20}$$

или в обозначениях (I.I9):

$$\int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt = \int_{t_1}^{t} \alpha(t)dt \cdot \int_{t_0}^{t_1} \alpha(t)dt. \tag{I.2I}$$

Из (I.2I) следует свойство

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(t)dt = \left(\int_{t_1}^{t_0} \alpha(t)dt \right)^{-1}. \tag{I.22}$$

Замечение 1.2. Термин мультипликативный интеграл оправдывается тем, что решение $\Phi(t,t_0)$ может быть получено (см. [7, I2]) как предел интегральных произведений:

$$\Phi(t,t_0) = \lim_{d\to 0} \{ \exp(\alpha(\tau_n)\Delta t_n) \dots \exp(\alpha(\tau_1)\Delta t_1) \}, \tag{I.23}$$

которые строятся по разбиению $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ отрезка $[t_0, t]$ и некоторому выбору точек $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$; предел берется при $d = \max_{1\le i\le n} \Delta t_i \to 0$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. (В книге [I2] используется другое обозначение мультипликативного интеграла – $\int_{t_0}^{t} \exp \alpha(t)dt$).

§ 2. Л. д. у. на $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим теперь многомерное л. д. у. вида

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \alpha_i(x) f \quad ; \quad i = 1, \dots, m , \tag{2.I}$$

где $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$; $\alpha_i(x)$ – (гладкие) функции на $\mathbb{R}^m$ со значениями в алгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$; f – неизвестная функция на $\mathbb{R}^m$ со значениями в $\mathbb{K}^n$.

Вводя в рассмотрение матрично-значную 1-форму

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\, dx^i \tag{2.2}$$

и векторно-значную 1-форму – дифференциал функции f :

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i ,$$

уравнение (2.I) можно переписать в виде

$$df = \alpha(x) f . \tag{2.3}$$

В силу теоремы Фробениуса (см. § 0.5), уравнение (2.3) будет вполне интегрируемым т. е. локально будет разрешима любая задача Коши

$$f(x_0) = f_0 \tag{2.4}$$

для уравнения (2.3) тогда и только тогда, когда будет выполнено условие Фробениуса, которое получается, если в силу свойства $d^2 = 0$ внешнего дифференциала, приравнять к нулю внешний дифференциал правой части (2.3) и подставить в полученное равенство значение df , определяемое уравнением (2.3). Проделав все это, получим

$$0 = d^2 f = d(df) = d\alpha\, f - \alpha \wedge df = d\alpha\, f - \alpha \wedge (\alpha f) = (d\alpha - \alpha\wedge\alpha) f ,$$

откуда, в силу произвольности значения f_0 в (2.4), получим

$$d\alpha = \alpha \wedge \alpha . \tag{2.5}$$

Это и есть условие Фробениуса для л. д. у. (2.3).

В координатах условие (2.5) приобретает вид

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} = [\alpha_i, \alpha_j] \ ; \ 1 \le i < j \le m , \tag{2.5'}$$

где в правой части (2.5)′ стоит коммутатор матриц: $[\alpha_i, \alpha_j] = \alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i$. (В форме (2.5)′ условие Фробениуса может быть получено из уравнения, записанного в виде (2.I), если приравнять смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$).

Еще одна эквивалентная форма условия Фробениуса получится, если при определении внешнего умножения $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$-значных форм использовать вместо ассоциативного умножения в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ умножение Ли. Тогда мы будем иметь (см. § 0.I, п. I7) $\alpha\wedge\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$, и (2.5) перепишется в виде

$$d\alpha = \frac{1}{2} [\alpha, \alpha] . \tag{2.6}$$

Условие (2.6) обладает тем преимуществом, что его можно перенести на случай уравнений, коэффициенты которых принадлежат произвольной, не обязательно линейной алгебре Ли.

Условие полной интегрируемости (2.5) гарантирует не только локальную разрешимость (2.3), но в силу линейности (2.3) – также и глобальную разрешимость на всем $\mathbb{R}^m$. Глобальное решение может быть получено снесением уравнения (2.3) на всевозможные пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, а именно: решение f задачи (2.3), (2.4) на всем $\mathbb{R}^m$ может быть представлено в виде

$$f(x) = f_\gamma(1) , \tag{2.7}$$

где γ – произвольный гладкий путь, соединяющий точки x_0 и x , а $f_\gamma(t)$ – решение на отрезке [0,I] задачи

$$df_\gamma = (\gamma^*\alpha) f , \tag{2.8}$$

$$f_\gamma(0) = f_0 . \tag{2.9}$$

В одномерном уравнении (2.8) форма $\gamma^*\alpha$ есть обратный образ формы α :

$$\gamma^*\alpha = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt} \right) dt . \tag{2.I0}$$

О разрешимости одномерной задачи (2.8), (2.9) мы говорили в § I, а независимость значения $f_\gamma(1)$ от выбора пути γ, такого, что $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x$, следует из полной интегрируемости (см. § 0.5).

Отметим (это будет важно в дальнейшем для уравнений с постоянными коэффициентами), что среди путей, соединяющих точки x_0, $x\in\mathbb{R}^m$, существует выделенный путь – отрезок прямой: $\gamma(t)=x_0+t(x-x_0)$, $t\in[0,1]$, касательный вектор к которому в каждой точке равен $x-x_0$ и для которого

$$(\gamma^*\alpha)(t)=\Big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\gamma(t))(x^i-x_0^i)\Big)\,dt. \tag{2.11}$$

Заметим также, что пути можно рассматривать не только гладкие, но и кусочно гладкие. Тогда для нахождения значения решения $f_\gamma(1)$ придется сносить уравнение (2.3) на каждый из участков гладкости γ и полученные одномерные уравнения решать по очереди, принимая за начальное значение для последующего уравнения конечное значение для предыдущего.

Также, как в § I, вместо векторного уравнения (2.I) или (2.3) можно рассматривать матричное уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}=\alpha_i(x)\,\Phi\quad;\ i=1,\dots,m, \tag{2.1$'$}$$

или, соответственно,

$$d\Phi=\alpha(x)\,\Phi, \tag{2.3$'$}$$

где Φ – неизвестная функция со значениями в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Из обратимости начального значения Φ_0 следует обратимость в каждой точке $x\in\mathbb{R}^m$ решения $\Phi(x)$ задачи

$$\Phi(x_0)=\Phi_0 \tag{2.4$'$}$$

для уравнения $(2.3)'$.

Если выполнено условие полной интегрируемости (2.5) уравнения (2.3) или, эквивалентно, $(2.3)'$, то любая задача $(2.3)'$, $(2.4)'$ будет глобально на всем $\mathbb{R}^m$ разрешима, и, в частности, будет существовать решение уравнения $(2.3)'$ с начальным условием

$$\Phi(0)=1. \tag{2.12}$$

Это решение мы будем обозначать символом Φ_α и называть <u>фундаментальным</u> решением. Его можно представить в виде <u>мультипликативного интеграла</u> вдоль произвольного пути γ, ведущего из точки 0 в точку x:

$$\Phi_\alpha(x)=\int_\gamma\alpha. \tag{2.13}$$

Интеграл в правой части (2.I3) определяется равенством

$$\int_\gamma\alpha=\int_0^1\gamma^*\alpha, \tag{2.14}$$

где справа стоит одномерный мультипликативный интеграл (см. § I).

Повторим теперь почти дословно рассуждения § I, позволившие вместо уравнений с $GL(n,\mathbb{K})$-значными неизвестными функциями рассматривать уравнения относительно функций со значениями в произвольной группе Ли A.

Уравнение $(2.3)'$ переписывается в виде

$$d\Phi\cdot\Phi^{-1}=\alpha \tag{2.15}$$

и рассматривается оператор (мультипликативный дифференциал)

$$D:\ C^\infty(\mathbb{R}^m,A)\longrightarrow\Lambda^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{a}), \tag{2.16}$$

определенный формулой

$$\langle(D\Phi)(x),X\rangle=(R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\,\Phi_{*,x}(X), \tag{2.17}$$

в которой $x\in\mathbb{R}^m$, $X\in T_x\mathbb{R}^m\simeq\mathbb{R}^m$ и которая превращается в формулу

$$D\Phi=d\Phi\cdot\Phi^{-1} \tag{2.17$'$}$$

для случая линейной группы A.

Как мы установим в §§ 3, 4, уравнение

$$D\Phi=\alpha \tag{2.18}$$

имеет свойства, вполне аналогичные свойствам линейного уравнения $(2.3)'$. В частности, (2.6) является условием полной интегрируемости (2.I8) и для уравнения (2.I8) можно повторить все сказанное в данном параграфе о представлении решения в виде мультипликативного интеграла.

Условие полной интегрируемости мы будем в дальнейшем записывать в виде

$$\mathfrak{D}\alpha=0, \tag{2.19}$$

где введен (нелинейный) оператор

$$\mathfrak{D}:\ \Lambda^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{a})\longrightarrow\Lambda^2(\mathbb{R}^m,\mathfrak{a}), \tag{2.20}$$

определенный формулой

$$\mathfrak{D}\alpha=d\alpha-\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]. \tag{2.21}$$

Ядро оператора $\mathfrak{D}$, т. е. множество $\operatorname{Ker}\mathfrak{D}=\mathfrak{D}^{-1}(0)$, мы будем обозначать $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{a})$, и формы, принадлежащие этому множеству, будем называть вполне интегрируемыми формами.

Заметим, что

$$\operatorname{Im} D = \operatorname{Ker} \mathcal{D}. \qquad (2.22)$$

Действительно, если $\alpha = D\Phi = d\Phi\cdot\Phi^{-1} \in \operatorname{Im} D$ (мы считаем для простоты группу A линейной; общий случай см. в § 3), то
$d\alpha = d(d\Phi\cdot\Phi^{-1}) = -d\Phi\wedge(d\Phi^{-1}) = d\Phi\cdot\Phi^{-1}\wedge d\Phi\cdot\Phi^{-1} = \alpha\wedge\alpha$, или $\mathcal{D}\alpha = 0$. Обратно, если $\mathcal{D}\alpha = 0$, то уравнение (2.18) имеет глобальное решение (например, фундаментальное) и поэтому $\alpha \in \operatorname{Im} D$.

§ 3. Оператор D (мультипликативный дифференциал) на многообразиях

Пусть M – гладкое многообразие. Рассмотрим оператор

$$D: C^\infty(M, A) \to \Lambda^1(M, \mathfrak{a}), \qquad (3.1)$$

определенный формулой

$$\langle (D\Phi)(x), X\rangle = (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x}(X)\ ;\ X\in T_xM, \qquad (3.2)$$

которая в случае линейной группы A дает

$$D\Phi = d\Phi\cdot\Phi^{-1}. \qquad (3.2)'$$

Остановимся подробнее на выяснении смысла оператора D.

1-форма $D\Phi$ на многообразии M ставит в соответствие касательному вектору $X\in T_xM$ вектор из алгебры Ли $\mathfrak{a}$, отождествляемой с касательным пространством T_1A в единице $1\in A$, который получается правым сдвигом касательного вектора $\Phi_{*,x}(X)\in T_{\Phi(x)}A$.

Если понимать $\mathfrak{a}$ как алгебру левоинвариантных полей на A, то $\langle (D\Phi)(x), X\rangle$ – это такое левоинвариантное векторное поле, которое в точке $1\in A$ совпадает с правоинвариантным полем, принимающим в точке $\Phi(x)\in A$ значение $\Phi_{*,x}(X)$.

Рассмотрим пример, который даст ценную информацию и об общей ситуации.

Возьмем в качестве многообразия M саму группу A и рассмотрим тождественное отображение $\Phi = id_A : A\to A$. Тогда $D\Phi$ есть $\mathfrak{a}$-значная 1-форма на A, которая в точке $a\in A$ действует на вектор $X\in T_aA$, сдвигая его правым сдвигом в точку 1, т.е. $D\Phi$ представляет собой не что иное, как <u>правую</u> форму Маурера-Картана ω (см. § 0.2, п. 9):

$$D(id_A) = \omega. \qquad (3.3)$$

Возвратившись теперь к общей ситуации $\Phi: M\to A$, заметим, что форма $D\Phi$ есть просто обратный образ формы Маурера-Картана ω при отображении Φ, т. е.

$$D\Phi = \Phi^*\omega. \qquad (3.4)$$

Действительно,

$$\langle (\Phi^*\omega)(x), X\rangle = \langle \omega(\Phi(x)), \Phi_{*,x}X\rangle = (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x}(X) = \langle (D\Phi)(x), X\rangle.$$

Рассмотрим примеры для некоторых частных типов групп Ли.

О главном из этих примеров, а именно: о случае линейной группы Ли A мы постоянно помним, так как формула $(3.2)'$ существенно проще для выкладок, нежели общая формула (3.2).

В простейшем случае $A = GL(1,\mathbb{R})$ формула $(3.2)'$ сводится к

$$Df = \frac{df}{f} = d\ln f.$$

Еще один простой пример дает векторная группа Ли: $A = \mathbb{R}^n$. В этом случае естественное отождествление группы A с ее алгеброй Ли приводит к тому, что все правые сдвиги $(R_{a^{-1}})_{*,a}$ тождественны и поэтому $D\Phi = d\Phi$.

Перейдем теперь к изучению свойств оператора D.

Рассмотрим группу $C^\infty(M,A)$, которую впредь будем обозначать $\mathcal{F}_A(M)$. Присоединенное представление Ad группы Ли A в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ (см. § 0.2, п. 8) определяет линейное представление группы $\mathcal{F}_A(M)$ на векторном пространстве $\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$:

$$(\Phi, \alpha) \longmapsto (Ad\,\Phi)\alpha, \qquad (3.5)$$

где $\Phi\in\mathcal{F}_A(M)$, $\alpha\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$, и дифференциальная форма $(Ad\,\Phi)\alpha \in \Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ определяется равенством:

$$\langle ((Ad\,\Phi)\alpha)(x), X\rangle = (Ad\,\Phi(x))\langle \alpha(x), X\rangle\ ;\ X\in T_xM. \qquad (3.6)$$

Если A – линейная группа Ли, то $(Ad\,a)\xi = a\xi a^{-1}$, где $a\in A$, $\xi\in\mathfrak{a}$, и (3.6) перепишется в виде

$$\langle ((Ad\,\Phi)\alpha)(x), X\rangle = \Phi(x)\langle \alpha(x), X\rangle\Phi^{-1}(x). \qquad (3.6)'$$

<u>Свойство 3.1.</u> Справедливо следующее правило (мультипликативного) дифференцирования произведения:

$$D(\Phi\Psi) = D\Phi + (Ad\,\Phi)D\Psi\ ;\ \Phi,\Psi\in\mathcal{F}_A(M). \qquad (3.7)$$

<u>Доказательство</u>. С помощью формулы (0.1.76) из введения и формулы для дифференциала сложной функции (0.1.59) нетрудно доказать следующее правило дифференцирования произведения:

$$(\Phi\Psi)_{*,x} = (R_{\Psi(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x} + (L_{\Phi(x)})_{*,\Psi(x)}\Psi_{*,x}, \qquad (3.8)$$

где R_a, L_a – операторы правого и левого сдвигов в группе A.

Применяя (3.8), а также (еще несколько раз) формулу для дифференциала сложной функции и учитывая тот факт, что левые и правые сдвиги коммутируют друг с другом, можем записать цепочку равенств:

$$(D(\Phi\Psi))(x) = (R_{(\Phi(x)\Psi(x))^{-1}})_{*,\Phi(x)\Psi(x)}(\Phi\Psi)_{*,x} =$$

$$= (R_{\Psi^{-1}(x)\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)\Psi(x)}\{(R_{\Psi(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x} + (L_{\Phi(x)})_{*,\Psi(x)}\Psi_{*,x}\} =$$

$$= (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}(R_{\Psi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)\Psi(x)}(R_{\Psi(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x} +$$

$$+ (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}(R_{\Psi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)\Psi(x)}(L_{\Phi(x)})_{*,\Psi(x)}\Psi_{*,x} =$$

$$= (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x} + (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}(L_{\Phi(x)})_{*,1}(R_{\Psi^{-1}(x)})_{*,\Psi(x)}\Psi_{*,x} =$$

$$= (D\Phi)(x) + (\mathrm{Int}\,\Phi(x))_{*,1}(D\Psi)(x) =$$

$$= (D\Phi)(x) + (\mathrm{Ad}\,\Phi(x))(D\Psi)(x).$$

Заметим, что доказательство свойства I значительно прозрачнее в случае линейной группы A:

$$D(\Phi\Psi) = d(\Phi\Psi)\cdot(\Phi\Psi)^{-1} = (d\Phi\cdot\Psi + \Phi\cdot d\Psi)\cdot\Psi^{-1}\Phi^{-1} =$$

$$= d\Phi\cdot\Phi^{-1} + \Phi\cdot d\Psi\cdot\Psi^{-1}\cdot\Phi^{-1} = D\Phi + (\mathrm{Ad}\,\Phi)D\Psi.$$

И в дальнейшем, если возникают трудности в понимании того или иного доказательства, читателю следует ограничиться случаем линейной группы и самостоятельно провести доказательство в этой более простой ситуации.

Из свойства I сразу вытекает

Следствие 3.I. Если $C = \mathrm{const} \in A$, то

$$D(\Phi C) = D\Phi. \tag{3.8}$$

Таким образом, оператор D не замечает правого умножения функции на константу. Левое умножение он, конечно, заметит:

Следствие 3.2. Если $C = \mathrm{const} \in A$, то

$$D(C\Phi) = (\mathrm{Ad}\,C)D\Phi. \tag{3.9}$$

Выведем теперь второе свойство оператора D

Свойство 3.2.

$$D(\Phi^{-1}) = -(\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D\Phi. \tag{3.I0}$$

Доказательство. Пусть $1 : M \to A$ постоянное отображение, тождественно равное $1 \in A$. Тогда по формуле (3.7)

$$0 = D1 = D(\Phi^{-1}\Phi) = D(\Phi^{-1}) + (\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D\Phi,$$

откуда следует (3.I0).

Замечание 3.I. Оператор D, который мы рассматриваем, можно назвать правым мультипликативным дифференциалом (см. [5], с. 306): $D = D_{right}$. Можно было бы аналогичным образом ввести левый дифференциал D_{left}:

$$\langle (D_{left}\Phi)(x), X\rangle = (L_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x}(X).$$

Соотношение между D_{right} и D_{left} вытекает из соотношения $L_{\Phi^{-1}(x)} = (L_{\Phi^{-1}(x)}R_{\Phi(x)})R_{\Phi^{-1}(x)}$, дифференцируя которое мы получаем $(L_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)} = (L_{\Phi^{-1}(x)}R_{\Phi(x)})_{*,1}(R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)} = (\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1}(x))(R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}$ откуда следует, что

$$D_{left}\Phi = (\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D_{right}\Phi,$$

и далее, в силу (3.I0):

$$D_{right}(\Phi^{-1}) = -D_{left}\Phi. \tag{3.II}$$

Если группа A линейная, то формула (3.I0) примет вид

$$D(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}D\Phi\cdot\Phi, \tag{3.I0$'$}$$

или, согласно (3.2)$'$,

$$D(\Phi^{-1}) = -\Phi^{-1}d\Phi. \tag{3.I0$''$}$$

Обратимся теперь к изучению ядра оператора D.

Свойство 3.3. $\mathrm{Ker}\,D$ состоит из всех локально постоянных (т. е., постоянных на каждой связной компоненте) функций на M.

Доказательство. Из $0 = \langle (D\Phi)(x), X\rangle = (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\Phi_{*,x}(X)$ следует в силу невырожденности $(R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}$, что $\Phi_{*,x} = 0$ для любого $x \in M$, откуда и получается требуемое утверждение.

Из свойств I, 2, 3 вытекает

Следствие 3.3. Равенство $D\Phi = D\Psi$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Psi = \Phi C$, где C – локально постоянная функция.

Доказательство. То, что из $\Psi = \Phi C$ следует $D\Psi = D\Phi$, мы уже установили (следствие 3.I); надо только "$C = \mathrm{const}$" заменить на "C – локально постоянно". Пусть теперь $D\Phi = D\Psi$, отсюда

$$D(\Phi^{-1}\Psi) = D(\Phi^{-1}) + (\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D\Psi = -(\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D\Phi + (\mathrm{Ad}\,\Phi^{-1})D\Phi = 0,$$

откуда, по свойству 3.3, $\Phi^{-1}\Psi$ локально постоянно.

Замечание 3.2. Доказанное следствие 3.3 выражает теорему единственности для уравнения $D\Phi = \alpha$. Действительно, если Φ, Ψ – два решения этого уравнения, то будем иметь $\Psi = \Phi C$, где C – локально постоянно. Если решения Φ, Ψ удовлетворяют одному и тому же начальному условию $\Phi(x_0) = \Psi(x_0) = a_0 \in A$, то мы получим, что $C = 1$ на любом связном множестве, содержащем x_0, на котором определены Φ и Ψ, т. е. $\Psi(x) = \Phi(x)$ на этом множестве.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathfrak{D} : \Lambda^1(M, \mathfrak{a}) \longrightarrow \Lambda^2(M, \mathfrak{a}) , \tag{3.12}$$

определенный формулой

$$\mathfrak{D}\alpha = d\alpha - \tfrac{1}{2}[\alpha, \alpha] . \tag{3.13}$$

Для случая $M = \mathbb{R}^m$ оператор $\mathfrak{D}$ уже встречался в § 2.

Свойство 3.4. $\quad \mathfrak{D} \cdot D = 0 . \quad$ (3.14)

Доказательство. Основано на формуле (3.4) и на уравнении Маурера-Картана (0.2.36): $d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$. Действительно,

$$d D\Phi = d\,\Phi^*\omega = \Phi^* d\omega = \Phi^*(\tfrac{1}{2}[\omega, \omega]) =$$

$= \frac{1}{2}[\Phi^*\omega, \Phi^*\omega] = \frac{1}{2}[D\Phi, D\Phi]$, что и требовалось доказать.

Из свойства 4 очевидным образом вытекает

Следствие 3.4. $\quad \operatorname{Im} D \subset \operatorname{Ker} \mathfrak{D} . \quad$ (3.15)

Включение (3.15) в отличие от ситуации § 2 может, как мы убедимся в следующем параграфе, оказаться строгим, если только многообразие M не односвязно.

Рассмотрим теперь "замену" групп Ли с помощью гомоморфизма групп Ли $h : A \to A'$.

Свойство 3.5. $\quad D(h \cdot \Phi) = (h_{*,1}) D\Phi . \quad$ (3.16)

Доказательство. Для доказательства нужно продифференцировать в точке $\Phi(x) \in A$ равенство $h \cdot R_{\Phi^{-1}(x)} = R'_{h(\Phi^{-1}(x))} \cdot h$, где R' – правый сдвиг в группе A'. Получим

$$(D(h\cdot\Phi))(x) = (R'_{(h(\Phi(x)))^{-1}})_{*, h(\Phi(x))} (h\cdot\Phi)_{*,x} =$$

$$= (R'_{h(\Phi^{-1}(x))})_{*, h(\Phi(x))} h_{*,\Phi(x)} \Phi_{*,x} = h_{*,1} (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)} \Phi_{*,x} = h_{*,1} (D\Phi)(x) .$$

И, наконец, сформулируем свойство коммутирования оператора D с действием на формы отображения φ^*, определяемого гладким отображением многообразий $\varphi : M_1 \to M_2$.

Свойство 3.6. $\quad \varphi^* \cdot D = D \cdot \varphi^* . \quad$ (3.17)

Доказательство. Действительно, для $\Phi \in C^\infty(M_2, A)$:

$$\langle(\varphi^* D\Phi)(x), X\rangle = \langle(D\Phi)(\varphi(x)), \varphi_{*,x}(X)\rangle =$$

$$= (R_{\Phi(\varphi(x))})^{-1}_{*,1} \Phi_{*,\varphi(x)}(\varphi_{*,x}(X)) = (R_{(\Phi\circ\varphi)(x)})^{-1}_{*,1} (\Phi\circ\varphi)_{*,x}(X) =$$

$$= (R_{(\varphi^*\Phi)(x)})^{-1}_{*,1} (\varphi^*\Phi)_{*,x}(X) = \langle(D\varphi^*\Phi)(x), X\rangle .$$

§ 4. Полная интегрируемость уравнения $D\Phi = \alpha$ на многообразии

Рассмотрим теперь уравнение

$$D\Phi = \alpha \tag{4.1}$$

на (связном) C^∞-многообразии M.

Во введении мы рассматривали различные формы теоремы Фробениуса, однако уравнение (4.1) есть уравнение несколько иного типа, чем те, которые во введении были исследованы. Поэтому придется заново ввести определение полной интегрируемости, специально для уравнений вида (4.1). Впрочем, определение переносится дословно.

Определение 4.1. Уравнение (4.1) называется вполне интегрируемым, если для любых $x_0 \in M$, $a_0 \in A$ в окрестности точки x_0 существует решение Φ уравнения (4.1), такое, что $\Phi(x_0) = a_0$.

Такое решение в силу следствия 3.3 из свойств оператора D будет единственным. Действительно, наличие двух решений Φ и Ψ привело бы к тому, что $D\Phi = D\Psi$, откуда $\Phi = \Psi C$, где C – локально постоянная функция (а в силу связности M – и просто постоянная). А поскольку $\Phi(x_0) = \Psi(x_0) = a_0$, получается $C = 1$.

Теорема 4.1. Для полной интегрируемости уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы форма α удовлетворяла условию

$$\mathfrak{D}\alpha = 0 . \tag{4.2}$$

Доказательство. Необходимость сразу следует из свойства 3.4 оператора D. Докажем достаточность условия (4.2).

Рассмотрим дифференциальную форму

$$\theta = pr_1^*\alpha - pr_2^*\omega \in \Lambda^1(M\times A, \mathfrak{a}) \tag{4.3}$$

на произведении $M \times A$, где pr_i $(i = 1, 2)$ – проекции на соответствующий сомножитель, ω – правая форма Маурера-Картана на A. Образуем [см. (0.5.9)] соответствующую форме θ дифференциальную систему Q:

$$Q_{(x,a)} = \{ X \in T_{(x,a)}(M\times A) : \langle\theta(x,a), X\rangle = 0 \} . \tag{4.4}$$

Проверим выполнение условий: 1) отображение

$$\theta(x,a) : T_{(x,a)}(M\times A) \simeq T_x M \oplus T_a A \longrightarrow \mathfrak{a} \tag{4.5}$$

сюръективно; 2) $\dim \operatorname{Ker} \theta(x,a) = \mathrm{const}$.

Имеем для $(X,Y) \in T_xM \oplus T_aA$ по определению формы θ :

$$\langle \theta(x,a), (X,Y) \rangle = \langle \alpha(x), X \rangle - \langle \omega(a), Y \rangle = \langle \alpha(x), X \rangle - (R_{a^{-1}})_{*,a} Y, \tag{4.6}$$

поэтому для любого $Z \in \mathcal{A}$ найдется пара векторов $(X,Y) \in T_xM \oplus T_aA$ такая, что $\langle \theta(x,a), (X,Y) \rangle = Z$ [вектор X можно взять произвольно, а Y – найти по формуле $Y = (R_a)_{*,1}(\langle \alpha(x), X \rangle - Z)$], так что условие 1) выполняется.

Далее, из формулы (4.6) следует, что

$$\operatorname{Ker} \theta(x,a) = \{ (X, (R_a)_{*,1} \langle \alpha(x), X \rangle) : X \in T_xM \}, \tag{4.7}$$

откуда видно, что $\dim \operatorname{Ker} \theta(x,a) = \mathrm{const} = \dim M$, так что условие 2) также выполняется.

Применим теперь к дифференциальной системе Q теорему Фробениуса (§ 0.5) в ее форме (vii).

Вычислим дифференциал формы θ : $d\theta = d(pr_1^*\alpha - pr_2^*\omega) =$

$$\overset{(4.2)}{\underset{(0.2.36)}{=}} pr_1^*(\tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]) - pr_2^*(\tfrac{1}{2}[\omega,\omega]) = \tfrac{1}{2}([pr_1^*\alpha, pr_1^*\alpha] - [pr_2^*\omega, pr_2^*\omega]) =$$

$= \frac{1}{2}[pr_1^*\alpha + pr_2^*\omega,\ pr_1^*\alpha - pr_2^*\omega]$, где на последнем шаге использована коммутативность внешней скобки для 1-форм (см. § 0.1, п. 17). Вводя в рассмотрение форму $\xi = \frac{1}{2}(pr_1^*\alpha + pr_2^*\omega) \in \Lambda^1(M \times A, \mathcal{A})$, доказанное равенство можно переписать в виде

$$d\theta = [\xi, \theta]. \tag{4.8}$$

Формуле (4.8) можно придать вид (0.5.10), если рассмотреть форму $\eta = \mathrm{ad}\, \xi \in \Lambda^1(M \times A, \mathfrak{gl}(\mathcal{A}))$. Тогда (4.8) перепишется в виде

$$d\theta = \eta \wedge \theta, \tag{4.9}$$

и мы получим, что дифференциальная система Q вполне интегрируема.

Остается выяснить вид интегральных многообразий для Q. Заметим, что, как следует из (4.7), отображения $(pr_1)_* |_{\operatorname{Ker} \theta(x,a)}$ представляют собой изоморфизм, и в соответствии с заключительным замечанием § 0.5, интегральные многообразия будут иметь вид

$$M \supset U \xrightarrow{\varphi = (id, \Phi)} M \times A. \tag{4.10}$$

Условие [см. (0.5.5)], при котором (4.10) является интегральным многообразием, достаточно записать для одной формы θ, порождающей Q :

$$\varphi^*\theta = 0. \tag{4.11}$$

Для отображения

$$\Phi = pr_2 \circ \varphi : M \longrightarrow A \tag{4.12}$$

получим $\Phi^*\omega = (\varphi^* \circ pr_2^*)\omega = \varphi^*(pr_1^*\alpha - \theta) = (\varphi^* \circ pr_1^*)\alpha = (pr_1 \circ \varphi)^*\alpha = \alpha$, т. е. [см. (3.4)] функция (4.12) является на множестве U решением д. у. (4.1), удовлетворяющем условию [см. (0.5.14)] :

$$\Phi(x) = a. \tag{4.13}$$

Достаточность условия (4.2) доказана.

<u>Замечание 4.1.</u> В силу следствия 3.1 из свойств оператора D окрестность U точки $x_0 \in M$, в которой разрешима задача Коши $\Phi(x_0) = a_0$ для уравнения (4.1), может быть выбрана независимо от $a_0 \in A$. Более того, может быть выбрана такая окрестность U, в которой будут разрешимы все задачи Коши вида $\Phi(x_1) = a_1$ для любых $x_1 \in U, a_1 \in A$. Действительно, пусть $\Phi^{(0)}(x)$ – решение в окрестности U задачи $D\Phi^{(0)} = \alpha$, $\Phi^{(0)}(x_0) = 1$. Обозначим $a = \Phi^{(0)}(x_1)$ и рассмотрим функцию $\Phi(x) = \Phi^{(0)}(x) a^{-1} a_1$. Эта функция будет, согласно следствию 3.1, удовлетворять тому же уравнению (4.1) и будет, очевидно, решать задачу $\Phi(x_1) = a_1$.

Условимся форму $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathcal{A})$, для которой уравнение (4.1) вполне интегрируемо, называть вполне интегрируемой формой и будем обозначать символом $\mathcal{L}^1(M,\mathcal{A})$ множество вполне интегрируемых форм:

$$\mathcal{L}^1(M,\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} \mathcal{D} = \{ \alpha \in \Lambda^1(M,\mathcal{A}) : d\alpha - \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0 \}. \tag{4.14}$$

Оператор (3.12), задающий условия полной интегрируемости, нелинеен. Явно его действие на сумму форм дается следующей формулой:

<u>Предложение 4.1.</u>

$$\mathcal{D}(\alpha + \beta) = \mathcal{D}\alpha + \mathcal{D}\beta - [\alpha, \beta]. \tag{4.15}$$

<u>Доказательство</u> получается непосредственно, надо только помнить, что для 1-форм α, β их внешняя скобка коммутативна: $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$ (§ 0.1, п. 17).

§ 5. <u>Мультипликативные интегралы.</u> <u>Гомоморфизм монодромии</u>

Рассмотрим вполне интегрируемое д. у. (4.1) на связном многообразии M. Условие полной интегрируемости обеспечивает для каждой точки (x_0 , a_0) $\in M\times A$ существование такой окрестности U точки x_0 , что на этой окрестности однозначно разрешима задача Коши:

$$D\Phi = \alpha \quad ; \tag{5.1}$$

$$\Phi(x_0) = a_0 \quad . \tag{5.2}$$

Согласно замечнию 4.1 в окрестности U будут разрешимы задачи Коши

$$\Phi(x_1) = a_1 \tag{5.3}$$

для любых $x_1 \in U$, $a \in A$.

Окрестности, в которых разрешимы задачи (5.1), (5.3), будем называть специальными для уравнения (5.1).

Рассмотрим теперь некоторый гладкий путь в многообразии M : $\gamma : [0,1] \to M$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. Каждую точку $x \in \mathrm{Im}\,\gamma$ заключим в специальную окрестность U_x , которую можно считать односвязной. В силу компактности $\mathrm{Im}\,\gamma = \gamma([0,1])$ можно выбрать из покрытия $\{U_x\}_{x\in \mathrm{Im}\,\gamma}$ конечное подпокрытие $\{U_i\}_{i\in I}$, которое, если его слегка подправить, может быть сделано таким, что все парные пересечения $U_i \cap U_j$ будут связными. Отрезок $[0,1]$ можно теперь разбить на конечное число отрезков точками деления $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$, так, что участок пути $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ целиком содержится в окрестности U_i ($i = 1,\ldots,N$). (Среди окрестностей U_i могут быть повторяющиеся). Обозначим $x_i = \gamma(t_i)$ (в частности, $x = x_N$).

Будем теперь по очереди решать задачи Коши, начиная со следующей:

$$D\Phi_1^{(0)} = \alpha|_{U_1} \quad ; \tag{5.4}$$

$$\Phi_1^{(0)}(x_0) = 1 \; . \tag{5.5}$$

Решив (5.4), найдем значение

$$a_1 = \Phi_1^{(0)}(x_1) \tag{5.6}$$

и перейдем к задаче

$$D\Phi_2 = \alpha|_{U_2} \quad ; \tag{5.7}$$

$$\Phi_2(x_1) = a_1 \; . \tag{5.8}$$

По следствию 3.3 из свойств оператора D , которое выражает теорему единственности, имеем

$$\Phi_1^{(0)}|_{U_1\cap U_2} = \Phi_2|_{U_1\cap U_2} . \tag{5.9}$$

Кроме того, очевидно, что решение $\Phi_2(x)$ задачи (5.7), (5.8)

может быть представлено в виде

$$\Phi_2(x) = \Phi_2^{(0)}(x)\,a_1 = \Phi_2^{(0)}(x)\,\Phi_1^{(0)}(x_1) \quad ; \quad x \in U_2 \; , \tag{5.10}$$

где $\Phi_2^{(0)}(x)$ – решение (5.7) с единичным начальным условием

$$\Phi_2^{(0)}(x_1) = 1 . \tag{5.11}$$

Продолжая процесс, получим последовательность $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$, в которой каждая функция $\Phi_i(x)$ является решением уравнения (5.1) на U_i ; на пересечениях $U_{i-1} \cap U_i$ эти решения совпадают. Кроме того, аналогично (5.10), получим

$$\Phi_i(x) = \Phi_i^{(0)}(x)\,\Phi_{i-1}^{(0)}(x_{i-1}) \ldots \Phi_2^{(0)}(x_2)\,\Phi_1^{(0)}(x_1) = \Phi_i^{(0)}(x)\,a_{i-1} \ldots a_2 a_1 \; , \tag{5.12}$$

где $\Phi_i(x)$ и $\Phi_i^{(0)}(x)$ – решения (5.1) на U_i с начальными условиями

$$\Phi_i(x_{i-1}) = a_{i-1} = \Phi_{i-1}(x_{i-1}) \tag{5.13}$$

и

$$\Phi_i^{(0)}(x_{i-1}) = 1 \; , \tag{5.14}$$

соответственно.

На последнем шаге мы получим решение Φ_N задачи

$$D\Phi_N = \alpha|_{U_N} \quad ; \tag{5.15}$$

$$\Phi_N(x_{N-1}) = a_{N-1} \; . \tag{5.16}$$

Значение

$$a_N = \Phi_N(x_N) \tag{5.17}$$

решения задачи (5.15), (5.16) в точке $x_N = x$ назовем мультипликативным интегралом от формы α вдоль пути γ и обозначим символом $\int_\gamma \alpha$.

Согласно (5.12)

$$\int_\gamma \alpha = a_N = \Phi_N(x_N) = \Phi_N^{(0)}(x_N)\,\Phi_{N-1}^{(0)}(x_{N-1}) \ldots \Phi_2^{(0)}(x_2)\,\Phi_1^{(0)}(x_1) = \Phi_N^{(0)}(x_N)\,a_{N-1} \ldots a_2 a_1 \; . \tag{5.18}$$

Тот факт, что данное определение корректно, т. е. не зависит ни от покрытия $\{U_i\}_{i=1}^N$, ни от выбора точек x_i , можно понять, если заметить, что то же самое значение мультипликативного интеграла $\int_\gamma \alpha$ мы получим, если снесем уравнение (5.1) на отрезок $[0,1]$:

$$D\phi = \gamma^*\alpha \; , \tag{5.19}$$

где $\gamma^*\alpha$ – обратный образ α при отображении γ , и, решив полученное уравнение (5.19), возьмем значение решения ϕ в точке 1 :

$$\phi(1) = \int_0^1 \psi^* \alpha \ . \tag{5.20}$$

Таким образом,

$$\int_\psi \alpha = \int_0^1 \psi^* \alpha \ . \tag{5.21}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости (5.2I), достаточно заметить, что, если $\Phi(x)$ есть решение (5.I) на какой-либо из окрестностей U_i, то $\phi = \Phi \circ \psi$ будет решением (5.I9) на соответствующем участке отрезка $[0,1]$.

Разрешимость одномерного уравнения на всем отрезке, строго говоря, тоже надо доказывать. Решение строится с помощью конечного покрытия отрезка $[0,1]$ специальными (одномерными) окрестностями, и здесь, уже в более простой ситуации, доказывается независимость решения от выбора покрытия и от выбора точек в пересечениях. При этом: I) независимость от выбора точек в пересечениях очевидна в силу теоремы единственности; 2) независимость от выбора покрытия доказывается переходом от двух покрытий к их общему измельчению и применением теоремы единственности.

Важное различие между левой и правой частями (5.2I) состоит в том, что правая часть определена для любых форм $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$, не обязательно вполне интегрируемых, а левая только для вполне интегрируемых форм $\alpha \in \mathfrak{X}^1(M, \mathfrak{a})$.

Мы будем пользоваться как более "широким" определением $\int$, т. е. считать, что мультипликативный интеграл представляет собой отображение

$$\int : \Lambda^1(M, \mathfrak{a}) \times P(M) \longrightarrow A \ , \tag{5.22}$$

где $P(M)$ – множество путей в многообразии M (см. § 0.3, п. I), так и более "узким" определением:

$$\int : \mathfrak{X}^1(M, \mathfrak{a}) \times P(M) \longrightarrow A \ , \tag{5.23}$$

причем при изучении свойств операций интегрирования (5.22) и (5.23) доказательства будем приводить для (5.23), а соответствующие факты для (5.22) будем формулировать и пояснять в замечаниях.

Обратим внимание еще и на то, что для определения интегрирования (5.22) нужна гладкость или по крайней мере кусочная гладкость пути $\psi \in P(M)$, тогда как для определения $\int_\psi \alpha$, данного с помощью покрытий [формула (5.I8)], достаточно непрерывности ψ и важна даже не сама кривая ψ, а, скорее, цепочка открытых множеств, такая, что $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ – ведущая от точки $x_0 \in U_1$ к точке

$x \in U_N$.

Перейдем к изучению свойств операции $\int$.

<u>Свойство 5.I.</u> Мультипликативный интеграл (5.23) определяет "представление" фундаментального группоида $P(M)$ в группу A, т. е.

$$\int_{\psi_2 \cdot \psi_1} \alpha = \int_{\psi_2} \alpha \cdot \int_{\psi_1} \alpha \ , \tag{5.24}$$

если произведение $\psi_2 \cdot \psi_1$ определено, т. е. если $\psi_2(0) = \psi_1(1)$.

Действительно, если мультипликативный интеграл определять формулой (5.I8), решая уравнения (5.I) шаг за шагом вдоль цепочки открытых множеств, то свойство (5.24) становится очевидным: надо рассмотреть композицию (объединение) цепочек, покрывающих пути ψ_1 и ψ_2 и воспользоваться независимостью от выбора покрытия.

<u>Замечание 5.I.</u> Для интегрирования (5.22) также справедливо свойство (5.24). Чтобы это доказать, надо сначала установить независимость мультипликативного интеграла от замены параметра, а затем применить теорему единственности.

Из свойства 5.I немедленно вытекает

<u>Свойство 5.2.</u> Для обратного пути $\bar\psi$ имеем

$$\int_{\bar\psi} \alpha = \left(\int_\psi \alpha \right)^{-1} . \tag{5.25}$$

Особую роль играет следующее

<u>Свойство 5.3.</u> Если пути $\psi_0, \psi_1 \in P(M)$ такие, что $\psi_0(0) = \psi_1(0) = x_0$, $\psi_0(1) = \psi_1(1) = x_1$ гомотопны в классе путей с закрепленными концами x_0, x_1, то для интегрирования (5.23) справедливо

$$\int_{\psi_0} \alpha = \int_{\psi_1} \alpha \ . \tag{5.26}$$

<u>Доказательство.</u> Прежде всего заметим, что если путь целиком лежит в специальной окрестности, то, по определению (5.I2) мультипликативного интеграла, его значение зависит только от положения концов пути, и, в частности, гомотопия пути в пределах специальной окрестности не меняет мультипликативного интеграла.

Далее произвольную гомотопию $\psi_0 \overset{h}{\sim} \psi_1$ можно представить в виде итерированной гомотопии

$$\psi_0 = \varphi_0 \sim \varphi_1 \sim \varphi_2 \sim \ \dots \sim \varphi_{k-1} \sim \varphi_k = \psi_1 \ , \tag{5.27}$$

где в цепочке (5.27) каждый шаг $\varphi_{i-1} \sim \varphi_i$ представляет собой такую гомотопию, которая меняет кривую лишь в пределах некоторой специальной окрестности. Действительно, пусть $h : [0,1] \times [0,1] \to M$

есть гомотопия путей γ_0, γ_1.

Покроем компакт $\operatorname{Im} h$ специальными окрестностями и выберем конечное подпокрытие. Разобьем квадрат $[0,1] \times [0,1]$ на мелкие квадратики Σ_{ij} так, чтобы их образы $\sigma_{ij} = h(\Sigma_{ij})$ целиком лежали в специальных окрестностях, и будем теперь гомотопировать γ_0 поэтапно, каждый раз "добавляя квадратик". Все эти промежуточные гомотопии происходят в пределах соответствующих специальных окрестностей. Поэтому из свойства 5.1 и из сделанного выше замечания следует (5.26).

<u>Замечание 5.2.</u> Свойство 5.3 не справедливо для мультипликативного интеграла (5.22) от не вполне интегрируемых форм.

Свойства 5.3 и 5.1 позволяют определить гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(M, p^t)$ многообразия M с отмеченной точкой p^t в группу Ли A, соответствующий вполне интегрируемой форме α.

<u>Определение 5.1.</u> Гомоморфизмом монодромии уравнения 5.1 называется гомоморфизм

$$\alpha^{\#} : \pi_1(M) \longrightarrow A, \tag{5.28}$$

определенный равенством

$$\alpha^{\#}(\gamma) = \int_{\gamma} \alpha, \tag{5.29}$$

где $\gamma \in \pi_1(M)$, γ – любая петля (замкнутый путь) с началом и концом в точке p^t из гомотопического класса γ.

Определено, таким образом, отображение

$$\# : \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_1(M), A). \tag{5.30}$$

Отображение (5.30) будет использоваться в главах 3, 4. В главе 3 будет дан ответ на естественно возникающий вопрос о том, является ли $\#$ отображением "на", и, если нет, то каков образ этого отображения.

§ 6. <u>Подъем на универсальное накрывающее многообразие. Фундаментальное решение.</u>

Пусть на многообразии M задана вполне интегрируемая форма α. Покажем, что если многообразие M связно и односвязно, то мультипликативное интегрирование (5.18) вдоль путей, начинающихся в отмеченной точке p^t, приведет к построению глобального на M решения задачи:

$$D\Phi = \alpha ; \tag{6.1}$$

$$\Phi(p^t) = 1 . \tag{6.2}$$

Для этого соединим точку p^t с произвольной точкой $x \in M$ произвольным путем $\psi : [0,1] \to M$ ($\psi(0) = p^t$, $\psi(1) = x$) и положим

$$\Phi(x) = \int_{\psi} \alpha . \tag{6.3}$$

Корректность определения (6.3) следует из односвязности M и из свойства 5.3 мультипликативного интеграла.

Докажем, что формула (6.3) определяет решение уравнения (6.1). Это достаточно проверить локально, в некоторой окрестности U произвольной точки x. Будем считать, что U – специальная окрестность. Возьмем произвольную точку $y \in U$ и соединим точки x, y некоторым путем φ в пределах окрестности U.

Имеем

$$\Phi(y) = \int_{\varphi\cdot\psi} \alpha = \int_{\varphi} \alpha \cdot \int_{\psi} \alpha . \tag{6.4}$$

В правой части (6.4) второй сомножитель есть константа, а первый сомножитель, как функция от y, есть, в силу определения мультипликативного интеграла вдоль кривой, целиком лежащей в одной специальной окрестности, значение решения $\Phi^{(0)}$ в окрестности U задачи $\Phi^{(0)}(x) = 1$ для уравнения (6.1), т. е. $D(\int_{\varphi} \alpha) = \alpha$, откуда, в силу следствия 3.1 из свойства оператора D, получаем $D\Phi = \alpha$, что и требовалось доказать.

Таким образом, установлено

<u>Предложение 6.1.</u> Если M связно и односвязно, то

$$\operatorname{Ker} \mathfrak{D} = \operatorname{Im} D . \tag{6.5}$$

<u>Замечание 6.1.</u> Для $M = \mathbb{R}^m$ равенство (6.5) доказано уже в § 2 [равенство (2.22)]. В общем случае справедливо лишь включение (3.15).

Пусть теперь многообразие M не односвязно. В этом случае глобального решения уравнения (6.1) может не существовать. Приходится поднимать уравнение (6.1) на универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$ (в этом месте читателю следует обратиться к § 0.3, где приведены явная конструкция многообразия $\widetilde{M}$ и сводка необходимых в дальнейшем результатов и формул, относящихся к накрывающим многообразиям).

Поднятие формы $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$ на $\widetilde{M}$, т. е. форма $\tilde{\alpha} = \pi^* \alpha$, также будет вполне интегрируемой формой. Действительно, $\mathfrak{D}\tilde{\alpha} = d\tilde{\alpha} - \frac{1}{2}[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = d\pi^*\alpha - \frac{1}{2}[\pi^*\alpha, \pi^*\alpha] = \pi^*(d\alpha -$

$-\frac{1}{2}[\alpha,\alpha])\ =\ \pi^*(\mathfrak{D}\alpha)$, и поэтому $\mathfrak{D}\alpha = 0$ влечет $\mathfrak{D}\tilde{\alpha} = 0$. Та же цепочка равенств доказывает в силу инъективности π^* и обратное утверждение: $\mathfrak{D}\tilde{\alpha} = 0$ влечет $\mathfrak{D}\alpha = 0$. Объединяя прямое и обратное утверждения, получаем

Предложение 6.2. Форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha} \in \mathcal{L}^1(\tilde{M}, \mathfrak{A})$.

Из того, что (0.3.I8) есть изоморфизм и из предложения 6.3 немедленно выводится

Следствие 6.I. Имеется взаимно-однозначное отображение

$$\pi^*:\ \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{A}) \longrightarrow [\mathcal{L}^1(\tilde{M},\mathfrak{A})]^{\pi_1(M)} . \qquad (6.6)$$

Рассмотрим теперь на многообразии $\tilde{M}$ задачу Коши

$$D\Phi = \tilde{\alpha} \ ; \qquad (\tilde{6.1})$$

$$\Phi(\tilde{p^t}) = 1 , \qquad (\tilde{6.2})$$

где $\tilde{p^t}$ – отмеченная точка в $\tilde{M}$ (см. § 0.3).

В силу односвязности $\tilde{M}$ задача ($\tilde{6.1}$), ($\tilde{6.2}$) будет иметь (см. предложение 6.I) глобальное решение.

Определение 6.I. Глобальное на $\tilde{M}$ решение задачи ($\tilde{6.1}$), ($\tilde{6.2}$) будем называть <u>фундаментальным решением</u> уравнения (6.I) и будем обозначать это решение Φ_α .

Предложение 6.3. Пусть $\Phi_\alpha(y)$ – фундаментальное решение уравнения (6.I), тогда [с учетом отождествления (0.3.5)]

$$\Phi_\alpha(y\cdot\gamma) = \Phi_\alpha(y)\,\Phi_\alpha(\gamma) , \qquad (6.7)$$

где $\gamma \in \pi_1(M)$, $y \in \tilde{M}$.

Доказательство. Левая часть (6.7) может быть переписана в виде $(R_\gamma^*\Phi_\alpha)(y)$, следовательно (см. свойство 3,6 оператора D), $DR_\gamma^*\Phi_\alpha = R_\gamma^* D\Phi_\alpha = R_\gamma^*\tilde{\alpha} = R_\gamma^*\pi^*\alpha = \pi^*\alpha = \tilde{\alpha}$, т. е. левая часть удовлетворяет уравнению ($\tilde{6.1}$).

Чтобы доказать, что правая часть (6.7) также удовлетворяет уравнению ($\tilde{6.1}$), надо воспользоваться следствием 3.I из свойств оператора D : $D(\Phi_\alpha\cdot\Phi_\alpha(\gamma)) = D\Phi_\alpha = \tilde{\alpha}$, так как $\Phi_\alpha(\gamma) = \mathrm{const}$.

В точке $y = \tilde{p^t}$ обе части совпадают, следовательно (по теореме единственности), они совпадают тождественно.

Заметим, что свойство (6.7) является характеристическим для фундаментального решения д. у. (6.I) на M . Точнее, справедливо

Предложение 6.4. Функция

$$\Phi:\ \tilde{M} \longrightarrow A, \qquad (6.8)$$

удовлетворяющая условию $\Phi(\tilde{p^t}) = 1$, является фундаментальным решением некоторого уравнения вида (6.I) на M тогда и только тогда, когда выполнено

$$\Phi(y\cdot\gamma) = \Phi(y)\,\Phi(\gamma)\ ;\ y \in \tilde{M},\ \gamma \in \pi_1(M), \qquad (6.9)$$

или, что эквивалентно,

$$(R_\gamma^*\Phi)(y) = \Phi(y)\Phi(\gamma)\ ;\ y \in \tilde{M},\ \gamma \in \pi_1(M). \qquad (6.9)'$$

Доказательство в одну сторону уже проведено (предложение 6.3). Пусть теперь выполнено (6.9). Обозначим $\omega = D\Phi$. Это некоторая (вполне интегрируемая по свойству 3.4) форма на $\tilde{M}$. Докажем, что найдется форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$, такая, что $\omega = \pi^*\alpha$. Во-первых, в силу (6.9)′ и свойств оператора D : $R_\gamma^*\omega = R_\gamma^* D\Phi = DR_\gamma^*\Phi = D(\Phi\cdot\Phi(\gamma)) = D\Phi = \omega$, откуда по (0.3.I6), форма ω опускается на M , т. е. существует $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{A})$ такая, что $\omega = \tilde{\alpha}$, и, наконец, по предложению 6.2, $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$. Отсюда окончательно получаем: $D\Phi = \tilde{\alpha}$, что и требовалось доказать.

Предложение 6.5. Отображение $\gamma \longmapsto \Phi_\alpha(\gamma)$ группы $\pi_1(M)$ в группу Ли A есть гомоморфизм.

Доказательство. Имеем $\Phi_\alpha(y\cdot\gamma_1\gamma_2) = \Phi_\alpha((y\cdot\gamma_1)\cdot\gamma_2) = \Phi_\alpha(y\gamma_1)\Phi_\alpha(\gamma_2) = \Phi_\alpha(y)\,\Phi_\alpha(\gamma_1)\,\Phi_\alpha(\gamma_2)$ и, с другой стороны, $\Phi_\alpha(y\cdot\gamma_1\gamma_2) = \Phi_\alpha(y)\,\Phi_\alpha(\gamma_1\gamma_2)$, откуда $\Phi_\alpha(\gamma_1\gamma_2) = \Phi_\alpha(\gamma_1)\,\Phi_\alpha(\gamma_2)$.

Предложение 6.6. Гомоморфизм $\gamma \longmapsto \Phi_\alpha(\gamma)$ из предложения 6.5 совпадает с гомоморфизмом монодромии (5.28) уравнения (6.I).

Доказательство основано на следующей лемме о мультипликативных интегралах.

Лемма 6.I. Мультипликативные интегралы для вполне интегрируемых уравнений (6.I) и ($\tilde{6.1}$) вдоль путей ψ и $\tilde{\psi}_{y_0}$, (где $\tilde{\psi}_{y_0}$ – поднятие пути ψ с начальной точкой $y_0 \in \pi^{-1}(p^t)$; см. § 0.3, п. 4), соответственно, совпадают, т. е.

$$\int_\psi \alpha = \int_{\tilde{\psi}_{y_0}} \tilde{\alpha} . \qquad (6.10)$$

Доказательство леммы. Достаточно доказать (6.I0) для путей ψ , лежащих в некоторой специальной окрестности U точки $p^t \in M$. Пусть $\Phi(x)$ – решение (6.I), (6.2) в U . Тогда

$$\int_\psi \alpha = \Phi(\psi(1)) . \qquad (6.11)$$

Рассмотрим на $\widetilde{M}$ функцию $\widetilde{\Phi}(y) = (\pi^*\Phi)(y) = \Phi(\pi(y))$, $y \in \widetilde{M}$. В силу свойства 3.6 оператора D : $D\widetilde{\Phi} = D\pi^*\Phi = \pi^* D\Phi = \pi^*\alpha = \widetilde{\alpha}$ и, кроме того, $\widetilde{\Phi}(y_0) = \Phi(\pi(y_0)) = \Phi(pt) = 1$.

Следовательно, $\widetilde{\Phi}$ является решением уравнения ($\widetilde{6.I}$) с начальным условием $\widetilde{\Phi}(y_0) = 1$, и это решение определено на множестве $\pi^{-1}(U)$. Однако, в силу односвязности $\widetilde{M}$, решение $\widetilde{\Phi}$ можно продолжить до глобального на $\widetilde{M}$ решения уравнения ($\widetilde{6.I}$) (можно сказать, что односвязное многообразие покрывается одной специальной окрестностью). Аналогично (6.II) можно записать

$$\int_{\widetilde{\gamma}_{y_0}} \alpha = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}_{y_0}(1)) = \Phi((\pi \circ \widetilde{\gamma}_{y_0})(1)) = \Phi(\gamma(1)). \tag{6.I2}$$

Сравнивая (6.II) и (6.I2), получаем (6.I0), и лемма 6.I доказана.

Попутно нами получена дополнительная информация:

$$\int_{\gamma} \alpha = \widetilde{\Phi}(\widetilde{\gamma}_{y_0}(1)), \tag{6.I3}$$

где $\widetilde{\Phi}$ – глобальное на $\widetilde{M}$ решение уравнения ($\widetilde{6.I}$).

Равенство (6.I3) позволяет завершить доказательство предложения 6.6.

Возьмем $y_0 = \widetilde{pt} \in \widetilde{M}$, тогда $\widetilde{\Phi}$ есть не что иное, как фундаментальное решение уравнения (6.I), поэтому имеем

$$\int_{\gamma} \alpha = \Phi_{\alpha}(\widetilde{\gamma}(1)) \quad ; \quad \widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_{\widetilde{pt}}. \tag{6.I4}$$

В равенстве (6.I4) путь γ можно взять замкнутым, $\widetilde{\gamma}$ при этом может разомкнуться. Обозначим $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma]$ гомотопический класс петли γ. Имеем [см. (0.3.I3), (0.3.5)] $\widetilde{\gamma}(1) = [\gamma] = \widetilde{pt}\cdot\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}$. Отсюда в силу (5.29)

$$\alpha^{\#}(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{\gamma} \alpha = \Phi_{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}), \tag{6.I5}$$

что и доказывает предложение 6.6.

Перепишем с учетом (6.I5) равенство (6.9):

$$\Phi_{\alpha}(y\cdot\boldsymbol{\gamma}) = \Phi_{\alpha}(y)\,\alpha^{\#}(\boldsymbol{\gamma}) \quad ; \quad y \in \widetilde{M},\ \boldsymbol{\gamma} \in \pi_1(M) \tag{6.I6}$$

и заметим, что равенство (6.I6) можно было бы принять за определение гомоморфизма монодромии.

<u>Замечание 6.I</u>. Определим (сначала для случая односвязного многообразия M) отображение

$$\int : \mathcal{L}^1(M, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{F}_A(M), \tag{6.I7}$$

ставящее в соответствие форме $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathcal{A})$ ее фундаментальное решение Φ_{α} [т. е. решение задачи (6.I), (6.2)]. Это отображение является обратным к оператору (I.3.I) мультипликативного дифференцирования, суженному на подмножество $\mathcal{F}_A^{(0)}(M) = \{\Phi \in \mathcal{F}_A(M) : \Phi(pt) = 1\}$. Имеем, таким образом, взаимно-однозначное соответствие

$$\mathcal{L}^1(M, \mathcal{A}) \underset{D}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} \mathcal{F}_A^{(0)}(M). \tag{6.I8}$$

В случае неодносвязного многообразия имеем, в силу предложения 6.4, более сложную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{L}^1(\widetilde{M}, \mathcal{A})]^{\pi_1(M)} & \xrightarrow{\int} & \widehat{\mathcal{F}}_A(\widetilde{M}), \\ \uparrow \pi^* & \nearrow_{\widetilde{\int}} & \\ \mathcal{L}^1(M, \mathcal{A}) & & \end{array} \tag{6.I9}$$

где $\widehat{\mathcal{F}}_A(\widetilde{M}) = \{\Phi \in \mathcal{F}_A(\widetilde{M}) : \Phi(y\cdot\gamma) = \Phi(y)\Phi(\gamma),\ y \in \widetilde{M},\ \gamma \in \pi_1(M)\}$, а отображение $\widetilde{\int}$ ставит в соответствие форме α ее фундаментальное решение на $\widetilde{M}$ т. е. решение задачи ($\widetilde{6.I}$), ($\widetilde{6.2}$).

ГЛАВА 2.

Л. Д. У. С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОГООБРАЗИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

§ I. <u>Л.д.у. с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^1$ и на $\mathbb{R}^m$</u>.

Рассмотрим уравнение (I.I.3) на $\mathbb{R}^1$ в частном случае, когда коэффициенты его постоянны:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha\Phi \quad ; \quad \alpha = \mathrm{const} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}). \tag{I.I}$$

Фундаментальное решение уравнения (I.I) имеет, как хорошо известно, вид

$$\Phi_{\alpha}(t) = \exp t\alpha, \tag{I.2}$$

где $\exp$ – матричная экспонента.

Отображение $\Phi_{\alpha} : \mathbb{R}^1 \to GL(n, \mathbb{K})$ представляет собой гомоморфизм групп Ли, то есть определяет однопараметрическую подгруппу в группе $GL(n, \mathbb{K})$, касательным вектором к которой в точке $1 \in GL(n, \mathbb{K})$ является $\alpha \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Перейдем теперь к многомерному л. д. у. вида

$$d\Phi = \alpha\Phi \tag{I.3}$$

в предположении постоянства коэффициентов:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i dx^i \quad ; \quad \alpha_i = \mathrm{const} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}), \ i = 1, \dots, m .$$

Условие полной интегрируемости (I.2.5)$'$ в этом случае приобретает в силу постоянства α_i вид условия коммутирования:

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0 \quad ; \quad 1 \le i < j \le m . \qquad (I.4)$$

Если рассмотреть $\mathbb{R}^m$ как коммутативную алгебру Ли, а I-форму α как линейное отображение из $\mathbb{R}^m$ в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, то формуле (I.4) можно придать следующий смысл: отображение

$$\alpha : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \qquad (I.5)$$

является гомоморфизмом алгебр Ли, а образ гомоморфизма (I.5) представляет собой коммутативную подалгебру в алгебре $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Подобно тому, как мы делали это в § I.2, можно решать уравнение (I.3) вдоль путей, начинающихся, скажем, в начале координат $x_0 = 0$, с начальным условием $\Phi(0) = 1$. Но теперь выбор прямолинейного пути, ведущего из $x_0 = 0$ в точку x, дает особые преимущества: вдоль пути $\psi(t) = tx$ получим [см. (I, 2.I0)] уравнение

$$\frac{d\phi}{dt} = \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i \Big) \phi . \qquad (I.6)$$

Решая (I.6), получим в силу (I.2)

$$\phi(t) = \exp t \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i \Big) .$$

Следовательно, для фундаментального решения $\Phi_\alpha(x)$ уравнения (I.3), которое существует, если выполнено (I.4), получим

$$\Phi_\alpha(x) = \phi(1) = \exp \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i ,$$

или

$$\Phi_\alpha(x) = \exp \langle \alpha, x \rangle , \qquad (I.7)$$

где $\langle \alpha, x \rangle$ – значение I-формы α на векторе $x = \sum_{i=1}^{m} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Фундаментальное решение $\Phi_\alpha(x)$ является гомоморфизмом групп Ли:

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^m \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}). \qquad (I.8)$$

Действительно, $\Phi_\alpha(x+y) = \exp\langle \alpha, x+y \rangle = \exp(\langle \alpha, x \rangle + \langle \alpha, y \rangle) = \exp\langle \alpha, x \rangle \cdot \exp\langle \alpha, y \rangle = \Phi_\alpha(x)\, \Phi_\alpha(y)$, причем предпоследнее равенство в цепочке имеет место в силу того, что матрицы $\langle \alpha, x \rangle$ и

$\langle \alpha, y \rangle$ коммутируют для любых x, y, коль скоро попарно коммутируют матрицы $\alpha_i = \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle$.

Гомоморфизм групп Ли (I.8) и гомоморфизм алгебр Ли (I.5) соответствуют друг другу в том смысле, что (I.5) есть дифференциал (I.8) в единице $1 \in GL(n, \mathbb{K})$.

§ 2. Формы с постоянными коэффициентами на многообразиях линейной связности

Предположим теперь, что M – связное, C^∞-многообразие, на котором задана линейная связность ∇ (см. § 0.4).

Форма $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ называется постоянной (самопараллельной), если (см. § 0.4, п. 6)

$$\nabla \alpha = 0 , \qquad (2.I)$$

где $\nabla \alpha$ – ковариантный дифференциал формы α, т. е. тензорное поле на M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{a}$, определенное равенством (0.4.I8), примененным к $\mathfrak{a}$ – значному тензорному полю α типа (0,I):

$$(\nabla\alpha)(X,Y) = Y\langle \alpha, X \rangle - \langle \alpha, \nabla_Y X \rangle \ ; \ X, Y \in \mathfrak{X}(M) . \qquad (2.2)$$

Пространство постоянных форм будем обозначать $\Lambda^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, а его пересечение с множеством $\mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a})$ вполне интегрируемых форм будем обозначать $\mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$.

Форму $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ можно понимать (см. § 0.I, п. 7,I7) как поле $\mathfrak{a}$-значных ковекторов, т. е. элементов пространства $L(T_x M, \mathfrak{a}) \simeq T_x^* M \otimes \mathfrak{a}$. Пусть $T_\psi : T_{\psi(0)} M \to T_{\psi(1)} M$ есть оператор параллельного переноса (0.4.24) касательных векторов вдоль пути $\psi : [0,1] \longrightarrow M$, соответствующий связности ∇. Ковекторы будут переноситься с помощью оператора $(T^0_1)_\psi = (T^*_\psi)^{-1}$ [см. (0.4.28)], ковекторы со значениями в $\mathfrak{a}$ – с помощью оператора

$$L(T_{\psi(0)} M, \mathfrak{a}) \simeq T^*_{\psi(0)} M \otimes \mathfrak{a} \xrightarrow{S_\psi = (T^*_\psi)^{-1} \otimes id_{\mathfrak{a}}} T^*_{\psi(1)} M \otimes \mathfrak{a} \simeq L(T_{\psi(1)} M, \mathfrak{a}) , \qquad (2.3)$$

который в изоморфном виде можно задать формулой

$$\langle S_\psi a, Y \rangle = \langle a, T_\psi^{-1} Y \rangle \ ; \quad Y \in T_{\psi(1)} M , \ a \in L(T_{\psi(0)} M, \mathfrak{a}). \qquad (2.4)$$

Условие постоянства (самопараллельности) формы α можно переписать [см. (0.4.3I)] в виде равенства

$$S_\psi \alpha(\psi(0)) = \alpha(\psi(1)), \qquad (2.5)$$

которое должно выполняться для любой кривой ψ. Равенство (2.5) эквивалентно следующему равенству (в (2.4) надо взять $Y = T_\psi X$):

$$\langle \alpha(\psi(0)), X\rangle = \langle \alpha(\psi(1)), T_\psi X\rangle ;\quad X \in T_{\psi(0)}M. \qquad (2.6)$$

Если рассмотреть семейство кривых $\psi_t:[0,1]\to M$; $\psi_t(s) = \psi(ts)$, $t,s\in[0,1]$, то будем иметь $\psi_t(0)=\psi(0)$; $\psi_t(1) = \psi(t)$, и получим еще одно утверждение, эквивалентное постоянству формы α :

$$\langle \alpha(\psi(t)), T_{\psi_t}X\rangle = const, \quad t\in[0,1] \qquad (2.7)$$

для любой кривой ψ.

Постоянную форму α достаточно задать в одной точке $pt \in M$, т. е. достаточно задать линейное отображение $\alpha_0 \in L(T_{pt}M, \mathfrak{a})$, а в любой другой точке $x\in M$ значение формы α определится с помощью перенесения S_ψ :

$$\alpha(x) = S_\psi \alpha_0 \qquad (2.8)$$

вдоль любой кривой ψ, соединяющей точки pt и x. Однако чтобы определение (2.8) было корректным, нужна независимость результата перенесения от пути ψ.

Такая независимость будет иметь место, если (и только если) для любой замкнутой кривой ψ справедливо [см. (0.4.32)] :

$$S_\psi \alpha_0 = \alpha_0, \qquad (2.9)$$

что эквивалентно равенству

$$\langle\alpha_0, T_\psi X\rangle = \langle \alpha_0, X\rangle ;\quad X\in T_{pt}M. \qquad (2.10)$$

Последнему утверждению можно придать другую форму, если использовать понятие группы голономии $HL = HL(M,\nabla,pt)$ связности ∇ в точке pt (см. § 0.4, п. 7). Эта группа естественно действует на $T_{pt}M$ и контраградиентно – на $L(T_{pt}M,\mathfrak{a})$:

$$\langle h.a, X\rangle = \langle a, h^{-1}X\rangle ;\ h\in HL;\ X\in T_{pt}M;\ a\in L(T_{pt}M,\mathfrak{a}), \qquad (2.11)$$

где $h.X = T_\psi X$ для некоторой петли ψ, и тогда $h.a = S_\psi a$.

В этих терминах равенство (2.9) означает, что ковектор α_0 инвариантен относительно действия группы HL в пространстве $L(T_{pt}M,\mathfrak{a})$, определенного формулой (2.11), т. е. [см. (0.4.34)]

$$\alpha_0 \in [L(T_{pt}M,\mathfrak{a})]^{HL}. \qquad (2.12)$$

Равенство же (2.10) можно перефразировать следующим образом: α_0 постоянно на орбитах группы голономии HL в пространстве $T_{pt}M$.

Подводя итог, сформулируем следующее

Предложение 2.1. Пространство $\Lambda^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a})$ изоморфно пространству $[L(T_{pt}M,\mathfrak{a})]^{HL}$ инвариантов группы голономии HL в пространстве $L(T_{pt}M,\mathfrak{a})$ $\mathfrak{a}$-значных ковекторов в точке pt.

Указанный в предложении 2.1 изоморфизм устанавливается отображением ограничения

$$V_{pt}: \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) \to L(T_{pt}M,\mathfrak{a});\ V_{pt}(\alpha) = \alpha(pt), \qquad (2.13)$$

суженным на $\Lambda^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a})$:

$$V_{pt}: \Lambda^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} [L(T_{pt}M,\mathfrak{a})]^{HL}. \qquad (2.14)$$

Отображение распространения, обратное к изоморфизму (2.14), мы будем обозначать

$$S_{pt}: [L(T_{pt}M,\mathfrak{a})]^{HL} \xrightarrow{\sim} \Lambda^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a}). \qquad (2.15)$$

Оно определяется формулой $(S_{pt}a)(x) = S_\psi a$, где $\psi\in P(M;pt,x)$.

Пространство инвариантов $[L(T_{pt}M,\mathfrak{a})]^{HL}$ нам удобнее будет переобозначить следующим образом: $L^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$.

Возвратимся теперь к определению (2.1) постоянной формы в терминах ковариантного дифференциала:

$$Y\langle\alpha,X\rangle - \langle\alpha,\nabla_Y X\rangle = 0 ;\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M). \qquad (2.16)$$

Свернем форму α с тензором кручения Tor связности ∇ (см. § 0.4, п. 8), т. е. образуем ($\mathfrak{a}$-значный) тензор $\alpha\otimes Tor$ типа (1,4) и произведем в нем операцию свертывания $Contr$ (см. § 0.1, п. 8) по верхнему индексу у Tor и нижнему индексу у α. В результате получится $\mathfrak{a}$-значный тензор типа (0,2), который мы обозначим

$$\langle\alpha, Tor\rangle = Contr(\alpha\otimes Tor). \qquad (2.17)$$

С учетом формул (0.4.35), (2.16), (0.1.52, p = 1) получим для значения поля (2.17) на векторных полях $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$:

$\langle\alpha,Tor\rangle(X,Y) = \langle\alpha, Tor(X,Y)\rangle = \langle\alpha;\ \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]\rangle = X\langle\alpha,Y\rangle - Y\langle\alpha,X\rangle - \langle\alpha,[X,Y]\rangle = \langle d\alpha;\ X,Y\rangle$, или, окончательно:

$$\langle\alpha,Tor\rangle = d\alpha. \qquad (2.18)$$

Из (2.8) следует, в частности, что в случае отсутствия кручения ($Tor = 0$) всякая постоянная форма замкнута.

Займемся теперь вполне интегрируемыми постоянными формами. Условие полной интегрируемости (1.4.2), если его расписать на паре векторных полей $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ приобретет вид

$$\langle d\alpha;\ X,Y\rangle = \tfrac{1}{2}\langle[\alpha,\alpha];\ X,Y\rangle = [\langle\alpha,X\rangle, \langle\alpha,Y\rangle]. \qquad (2.19)$$

Равенство (2.18) с учетом (2.19) дает

$$\langle \alpha , Tor(X,Y)\rangle = [\langle\alpha,X\rangle , \langle\alpha,Y\rangle] \ ; \ X,Y\in \mathfrak{X}(M). \qquad (2.20)$$

Можем сформулировать

<u>Предложение 2.2.</u> Постоянная форма α вполне интегрируема (или: вполне интегрируемая форма α постоянна) тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.20).

Заметим, что в случае отсутствия кручения (2.20) сводится к условию коммутирования

$$[\langle\alpha,X\rangle , \langle\alpha,Y\rangle] = 0 \ ; \ X,Y\in \mathfrak{X}(M). \qquad (2.21)$$

Попытаемся охарактеризовать постоянные вполне интегрируемые формы в терминах изоморфизма (2.15).

Обозначим

$$\mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a}) = V_{pt}(\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a}))\subset L^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a}) \qquad (2.22)$$

подмножество ковекторов в точке pt, продолжающихся с помощью отображения S_{pt} до вполне интегрируемых постоянных форм.

Из (2.20) непосредственно вытекает, что ковектор $\alpha_0 \in \mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$ удовлетворяет условию

$$\langle\alpha_0 , Tor_0(X,Y)\rangle = [\langle\alpha_0,X\rangle , \langle\alpha_0,Y\rangle] \ ; \ X,Y\in T_{pt}M , \qquad (2.23)$$

где $Tor_0 = Tor(pt)$.

Обратно, из (2.23) будет следовать, что $\alpha_0\in \mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$, если докажем, что обращается в нуль ковариантный дифференциал тензорного поля $w = \langle\alpha,Tor\rangle - \frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$. Вычислим ∇w с использованием формул (0.4.14), (0.4.15), (0.4.14), (2.17): $\nabla w = \nabla Contr(\alpha\otimes Tor) - \frac{1}{2}\nabla[\alpha,\alpha] = Contr(\nabla\alpha\otimes Tor) + Contr(\alpha\otimes\nabla Tor) - \frac{1}{2}([\nabla\alpha,\alpha]+[\alpha,\nabla\alpha])$. Убеждаемся, что если тензор кручения постоянен, т. е.

$$\nabla Tor = 0 , \qquad (2.24)$$

ковектор $\alpha_0 \in L^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$ и выполнено (2.23), то $\alpha_0 \in \mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$ (действительно, ковектор $\alpha_0\in L^{(HL)}$ можно в силу предложения 2.1 продолжить до постоянной формы α ; из $\nabla\alpha = 0$ и (2.24) следует, что $\nabla w = 0$, и теперь обращение тензора w в нуль в одной точке pt [в силу (2.23)] влечет $w = 0$, откуда согласно предложению 2.2, форма α вполне интегрируема и, значит, $\alpha_0\in\mathcal{L}^{(HL)}$).

Мы доказали, таким образом,

<u>Предложение 2.3.</u> При условии (2.24) множество $\mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M,\mathfrak{a})$ состоит из ковекторов, удовлетворяющих (2.23), т. е. переводящих кручение Tor_0 в скобку в алгебре Ли $\mathfrak{a}$.

<u>Пример 2.1.</u> Рассмотрим пример многообразия абсолютного параллелизма (M, Π), снабженного прямой связностью $\nabla^{(\Pi)}$ (см. § 0.4, п. 12) и проследим, во что обратятся предложения 2.1–2.3 в этой ситуации.

Так как группа голономии параллелизованного многообразия тривиальна, то предложение 2.1 превращается в

<u>Предложение 2.4.</u> Имеет место изоморфизм

$$\Lambda^1_{const}(M,\Pi;\mathfrak{a}) \underset{S_{pt}}{\overset{V_{pt}}{\rightleftarrows}} L(T_{pt}M,\mathfrak{a}) . \qquad (2.25)$$

С учетом (0.4.59) получаем из предложения 2.2

<u>Предложение 2.5.</u> Постоянная форма α на многообразии абсолютного параллелизма вполне интегрируема (или: вполне интегрируемая форма α постоянна) тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\langle\alpha,[X,Y]\rangle = -[\langle\alpha,X\rangle , \langle\alpha,Y\rangle] \ ; \ X,Y\in\mathfrak{X}_{const}(M,\Pi). \qquad (2.26)$$

Условие (2.24) для случая параллелизованного многообразия эквивалентно в силу (0.4.59) и (0.4.54) условию постоянства структурных функций c^k_{ij}, что в свою очередь означает, что линейное пространство $\mathfrak{X}_{const}(M,\Pi)$ замкнуто относительно скобки полей и, следовательно, представляет собой m-мерную алгебру Ли, и тогда (2.26) означает, что α определяет антигомоморфизм этой алгебры Ли в алгебру Ли $\mathfrak{a}$.

Абсолютный параллелизм Π определяет изоморфизм

$$\mathfrak{X}_{const}(M,\Pi) \underset{S_{pt}}{\overset{V_{pt}}{\rightleftarrows}} T_{pt}M , \qquad (2.27)$$

который позволяет перенести структуру алгебры Ли из $\mathfrak{X}_{const}(M,\Pi)$ в $T_{pt}(M)$:

$$[X,Y]_0 = V_{pt}[S_{pt}X, S_{pt}Y] \ ; \ X,Y\in T_{pt}M . \qquad (2.28)$$

Заметим, что вследствие этого само многообразие M может быть наделено в окрестности точки pt структурой группы Ли.

Условие (2.23) превращается в случае $c^k_{ij} = const$ в следующее требование

$$\alpha_0 \in anti\ Hom_{Lie\ alg.}(T_{pt}M,\mathfrak{a}) , \qquad (2.29)$$

а предложение 2.3 превращается в

<u>Предложение 2.6.</u> В случае $c^k_{ij} = const$ имеет место изоморфизм

$$\mathcal{L}^1_{const}(M,\Pi;\mathfrak{a}) \underset{S_{pt}}{\overset{V_{pt}}{\rightleftarrows}} anti\ Hom_{Lie\ alg.}(T_{pt}M,\mathfrak{a}). \qquad (2.30)$$

Конкретизируя рассмотренный пример 2.I, исследуем

Пример 2.2. Пусть $M = G$ – связная группа Ли с правым параллелизмом Π_{right} (см. § 0.4, п. I3). В этом случае постоянными формами являются правоинвариантные, и только они. Структурные функции параллелизма есть взятые с противоположным знаком структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и алгебра Ли T_1G, структура которой определяется формулой (2.23), есть не что иное, как алгебра Ли $\mathfrak{g}_{right}$ (см. § 0.2, п. 5), которая антиизоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}(=\mathfrak{g}_{left})$. Таким образом, предложение 2.6 дает

Предложение 2.7. Имеет место изоморфизм

$$\mathcal{L}^1_{const}(G,\Pi_{right};\mathfrak{a}) \underset{S_1}{\overset{V_1}{\rightleftarrows}} Hom_{Lie\ alg.}(\mathfrak{g},\mathfrak{a}). \qquad (2.31)$$

§ 3. Накрывающая связность. Постоянные формы на накрывающем многообразии

Пусть (M, ∇) – многообразие линейной связности. Определим на накрывающем многообразии $\widetilde{M}$ (см. § 0.3, п. 2) линейную связность $\widetilde{\nabla}$, которую будем называть накрывающей связностью. Это можно сделать различными эквивалентными способами. С помощью отображений параллельного переноса определение дается следующим образом:

$$\widetilde{T}_\psi(Y) = (\pi_{*,\psi(1)})^{-1}T_{\pi\cdot\psi}(\pi_{*,\psi(0)}Y), \qquad (3.I)$$

где $\psi \in P(\widetilde{M})$ – путь в $\widetilde{M}$; $\pi: \widetilde{M}\to M$ – отображение накрытия [откуда следует, что все отображения $\pi_{*,y}: T_y\widetilde{M} \to T_{\pi(y)}M$ представляют собой изоморфизмы (см. § 0.3, п. 2) и, следовательно, определены им обратные]; $Y\in T_{\psi(0)}\widetilde{M}$; $T_{\pi\cdot\psi}$ – оператор параллельного переноса в смысле ∇ вдоль пути $\pi\cdot\psi$ в M. Определение (3.I) эквивалентно следующему определению в терминах ковариантных производных:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = (\pi_*)^{-1}(\nabla_{\pi_* X}\ \pi_* Y), \qquad (3.2)$$

где $X,Y\in \mathfrak{X}(U)$ – векторные поля в области $U\subset \widetilde{M}$, достаточно малой для того, чтобы $\pi|_U$ было диффеоморфизмом (и, следовательно, $\pi_*: \mathfrak{X}(U)\to \mathfrak{X}(\pi(U))$ было бы изоморфизмом).

Из (3,I) и (0.4.38) непосредственно усматривается, что кривая ψ в $\widetilde{M}$ является геодезической в смысле связности $\widetilde{\nabla}$ тогда и только тогда, когда кривая $\pi\cdot\psi$ является геодезической в (M, ∇). В частности, полнота многообразия $(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla})$ эквивалентна полноте (M, ∇).

С помощью формулы (3.2) нетрудно доказать, что тензоры $\widetilde{Tor}$ $\widetilde{Curv}$ кручения и кривизны связности $\widetilde{\nabla}$ могут быть найдены по формулам

$$\widetilde{Tor}(X,Y) = (\pi_*)^{-1}\,Tor(\pi_*X,\pi_*Y); \qquad (3.3)$$

$$\widetilde{Curv}(X,Y)Z = (\pi_*)^{-1}(Curv(\pi_*X,\pi_*Y)\pi_*Z), \qquad (3.4)$$

в которых поля X, Y, Z определены в такой окрестности $U\subset\widetilde{M}$, что $\pi|_U$ есть диффеоморфизм.

Построенная связность $\widetilde{\nabla}$ является $\pi_1(M)$ – инвариантной, т. е.

$$(R_\gamma)_*\widetilde{\nabla}_X Y = \widetilde{\nabla}_{(R_\gamma)_* X}(R_\gamma)_*Y \ ; \ X,Y\in\mathfrak{X}(\widetilde{M}) \qquad (3.5)$$

для любого диффеоморфизма $R_\gamma\in Diff(M)$, порожденного умножением на $\gamma\in\pi_1(M)$ (см. (0.33)). Это следует из определения (3.2) с учетом (0.3.4). Равенство (3.5) можно истолковать следующим образом: каждый диффеоморфизм R_γ, $\gamma\in\pi_1(M)$ является аффинным преобразованием связности $\widetilde{\nabla}$ (см. (0.4.48)).

Обратно, любая $\pi_1(M)$ – инвариантная [т. е. удовлетворяющая (3.5)] связность ∇' на $\widetilde{M}$ может быть опущена на M, т. е. может быть найдена связность ∇ на M такая, что $\nabla' = \widetilde{\nabla}$.

Так как согласно § 0.3, п. 5 отображение $\psi \longmapsto \pi\cdot\psi$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие $\Omega(\widetilde{M},\widetilde{pt}) \longrightarrow \Omega_0(M,pt)$, то для элементов групп голономии (см. § 0.4, п. 7) $h = \widetilde{T}_\psi \in Hl(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{pt})$, $\psi\in\Omega(\widetilde{M},\widetilde{pt})$ и $h_0 = T_{\pi\cdot\psi}\in Hl_0(M,\nabla,pt)$, $\pi\cdot\psi\in\Omega_0(M,pt)$ получим в силу (3.I)

$$h = (\pi_{*,\widetilde{pt}})^{-1}\,h_0\,\pi_{*,\widetilde{pt}}, \qquad (3.6)$$

т. е. при отождествлении

$$\pi_{*,\widetilde{pt}} : T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M} \longrightarrow T_{pt}M \qquad (3.7)$$

группа голономии $Hl(\widetilde{M},\widetilde{\nabla},\widetilde{pt})$ отождествляется с ограниченной группой голономии $Hl_0(M,\nabla,pt)$.

Отождествление (3.7) позволяет также считать, что полная группа голономии $Hl(M,\nabla,pt)$ действует не только на $T_{pt}M$, но и на $T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$. Это действие можно записать в виде

$$(h,X)\mapsto h.X = \pi^{-1}_{*,\widetilde{pt}}(h.\pi_{*,\widetilde{pt}}X);\ X\in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M};\ h\in Hl(M,\nabla,pt). \qquad (3.8)$$

или вводя обозначения $h = T_\varphi$, $\varphi \in \Omega(M, pt)$; $\gamma = [\varphi] \in \pi_1(M)$; $\widetilde{\varphi} \in P(\widetilde{M}; \widetilde{pt}, \gamma)$, более явно

$$h.X = \pi^{-1}_{*,\widetilde{pt}} T_\varphi \pi_{*,\widetilde{pt}} X \overset{(3.1)}{=} \pi^{-1}_{*,\widetilde{pt}} \pi_{*,\widetilde{\varphi}(1)} \widetilde{T}_{\widetilde{\varphi}} X = \pi^{-1}_{*,\widetilde{pt}} \pi_{*,\widetilde{pt}.\gamma} \widetilde{T}_{\widetilde{\varphi}} X, \tag{3.9}$$

или в силу (0.3.8)

$$h.X = (R_{\gamma^{-1}})_{*,\gamma} \widetilde{T}_{\widetilde{\varphi}} X = (R_\gamma)^{-1}_{*,\widetilde{pt}} \widetilde{T}_{\widetilde{\varphi}} X . \tag{3.10}$$

Приступим теперь к изучению постоянных (в смысле $\widetilde{\nabla}$) форм на $\widetilde{M}$. Прежде всего справедливо

Предложение 3.1:

$$[\alpha \in \Lambda^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{A})] \Leftrightarrow [\widetilde{\alpha} \in \Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})] . \tag{3.11}$$

Доказательство. Действительно, в силу (3.2) с использованием формул (0.1.74) и (0.1.75) получаем: $(\widetilde{\nabla}\widetilde{\alpha})(X,Y) = Y\langle\widetilde{\alpha}, X\rangle -$

$$- \langle\widetilde{\alpha}, \widetilde{\nabla}_Y X\rangle = Y\langle\pi^*\alpha, X\rangle - \langle\pi^*\alpha, \pi_*^{-1}\nabla_{\pi_*Y}\pi_*X\rangle = Y\pi^*\langle\alpha, \pi_*X\rangle - \pi^*\langle\alpha, \nabla_{\pi_*Y}\pi_*X\rangle =$$

$$= \pi^*\big((\pi_*Y)\langle\alpha, \pi_*X\rangle - \langle\alpha, \nabla_{\pi_*Y}\pi_*X\rangle\big) = \pi^*\big((\nabla\alpha)(\pi_*X, \pi_*Y)\big) ,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, $U \subset \widetilde{M}$, $\pi|_U$ - диффеоморфизм. Отсюда $[\nabla\alpha = 0] \Rightarrow [\widetilde{\nabla}\widetilde{\alpha} = 0]$, а в силу того, что $(\pi|_U)^*$ и $(\pi|_U)_*$ есть изоморфизмы, справедливо и обратное: $[\widetilde{\nabla}\widetilde{\alpha} = 0] \Rightarrow [\nabla\alpha = 0]$.

В итоге получаем:

$$[\nabla\alpha = 0] \Leftrightarrow [\widetilde{\nabla}\widetilde{\alpha} = 0] , \tag{3,12}$$

что и доказывает (3.11).

Рассмотрим теперь $\alpha \in \Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})$. Согласно § 0.3, п. 5 форма α опускаема на M , т. е. представима в виде $\alpha = \widetilde{\mu}$, где μ - форма на M (в силу предложения 3.1 - постоянная) тогда и только тогда, когда $\alpha \in [\Lambda^1(\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{\pi_1(M)}$, т. е. $R^*_\gamma\alpha = \alpha$ для любого $\gamma \in \pi_1(M)$. В частном случае, когда форма α постоянна и, следовательно, определяется своим значением $\alpha_0 = \alpha(\widetilde{pt}) \in L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ в отмеченной точке $\widetilde{pt} \in \widetilde{M}$, попытаемся охарактеризовать с помощью α_0 условие ее опускаемости на M .

Справедлива следующая

Лемма 3.1. Для любого $\gamma \in \pi_1(M)$

$$[\alpha \in \Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})] \Rightarrow [R^*_\gamma\alpha \in \Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})] . \tag{3.13}$$

Доказательство: $(\widetilde{\nabla}R^*_\gamma\alpha)(X,Y) = Y\langle R^*_\gamma\alpha, X\rangle - \langle R^*_\gamma\alpha, \widetilde{\nabla}_Y X\rangle =$

$$\overset{(0.1.75)}{=} YR^*_\gamma\langle\alpha, (R_\gamma)_*X\rangle - R^*_\gamma\langle\alpha, (R_\gamma)_*\widetilde{\nabla}_Y X\rangle \underset{(3.5)}{\overset{(0.1.74)}{=}} R^*_\gamma\big((R_\gamma)_*Y\langle\alpha, (R_\gamma)_*X\rangle -$$

$$- \langle\alpha, \widetilde{\nabla}_{(R_\gamma)_*Y}(R_\gamma)_*X\rangle\big) \overset{(2.2)}{=} R^*_\gamma\big((\widetilde{\nabla}\alpha)((R_\gamma)_*X, (R_\gamma)_*Y)\big).$$

Доказанная лемма 3.1 позволяет определить действие группы $\pi_1(M)$ на пространстве инвариантов

$$L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}; \mathfrak{A}) = [L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{HL(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{pt})} = [L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{HL_0(M, \nabla, pt)}$$

следующим образом:

$$(\gamma, \alpha_0) \longmapsto \gamma.\alpha_0 = V_{\widetilde{pt}} R^*_\gamma \widetilde{S}_{\widetilde{pt}} \alpha_0 \; ; \; \gamma \in \pi_1(M) \; ; \; \alpha_0 \in L^{(HL_0)}, \tag{3.14}$$

где $V_{\widetilde{pt}}$, $\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}$ - операторы ограничения и распространения (2.14), (2.15) на многообразии ($\widetilde{M}$, $\widetilde{\nabla}$). Таким образом, α_0 сначала продолжается до постоянной на $\widetilde{M}$ формы, затем эта форма подвергается преобразованию R^*_γ , в результате которого, в силу леммы 3.1, опять получается постоянная форма, которая затем ограничивается в точку $\widetilde{pt}$.

В силу самого определения действия (3.14) очевидно

Предложение 3.2. Форма $\alpha \in \Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})$ тогда и только тогда опускается до (автоматически постоянной) формы на M , когда ее значение $\alpha_0 = \alpha(\widetilde{pt}) \in L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ $\pi_1(M)$- инвариантно, т. е. $\gamma.\alpha_0 = \alpha_0$ для любого $\gamma \in \pi_1(M)$, или в других обозначениях:

$$\alpha_0 \in [L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{\pi_1(M)} = \big[[L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{HL_0(M, \nabla, pt)}\big]^{\pi_1(M)} . \tag{3.15}$$

"Двойное" пространство инвариантов в правой части (3.15) [т. е. пространство инвариантов действия (3.14) группы $\pi_1(M)$ на пространстве инвариантов действия группы $HL_0 = HL_0(M, \nabla, pt) \simeq HL(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}, \widetilde{pt})$ на пространстве $L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$] мы для краткости будем обозначать $L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$.

Покажем теперь, что пространство $L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ может быть получено другим способом - как пространство инвариантов действия

$$\langle h.\alpha_0, X\rangle = \langle\alpha_0, h^{-1}.X\rangle \; ; \; \alpha_0 \in L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) \; ; \; h \in HL \tag{3.16}$$

группы $HL = HL(M, \nabla, pt)$ на пространстве $L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$, контраградиентного действию (3.8) группы HL на $T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$.

Для этого распишем подробнее как действие (3.16), так и действие (3.14), принимая при вычислениях во внимание то, что каждое R_γ есть аффинное преобразование ($\widetilde{M}$, $\widetilde{\nabla}$) , т. е. коммутирует с операциями параллельного переноса [см. (0.4.45)].

Пусть $X \in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$; $\alpha_0 \in L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$; $h = T_\varphi \in HL(M, \nabla, pt)$; $\varphi \in \Omega(M, pt)$. Тогда по второй из формул (0.4.25) $h^{-1} = T_{\overline{\varphi}}$ и для действия (3.16) мы имеем

$$\langle h.\alpha_0, X\rangle = \langle\alpha_0, h^{-1}.X\rangle \overset{(3.10)}{=} \langle\alpha_0, (R_\gamma)_{*,\gamma^{-1}} \widetilde{T}_{\widetilde{\varphi}} X\rangle . \tag{3.17}$$

Пусть теперь $X \in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$, $\alpha_0 \in L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ и $\gamma = [\varphi] \in \pi_1(M)$ – гомотопический класс той самой петли $\varphi \in \Omega(M, pt)$, которая выше определяла элемент $h = T_\varphi$ группы голономии. Тогда для действия (3.I4) будем иметь: $\langle \gamma \cdot \alpha_0 \rangle = \langle V_{\widetilde{pt}} R_\gamma^* \widetilde{S}_{\widetilde{pt}} \alpha_0 , X \rangle = \langle (R_\gamma^* \widetilde{S}_{\widetilde{pt}} \alpha_0)(\widetilde{pt}),$

$X \rangle = \langle (\widetilde{S}_{\widetilde{pt}} \alpha_0)(\widetilde{pt} \cdot \gamma), (R_\gamma)_{*,\widetilde{pt}} X \rangle = \langle (\widetilde{S}_{\widetilde{pt}} \alpha_0)(\gamma), (R_\gamma)_{*,\widetilde{pt}} X \rangle \overset{(2.4)}{=} \langle \alpha_0,$

$\widetilde{T}^{-1}_{\widetilde{\varphi}} (R_\gamma)_{*,\widetilde{pt}} X \rangle = \langle \alpha_0, \widetilde{T}_{\overline{\widetilde{\varphi}}} (R_\gamma)_{*,\widetilde{pt}} X \rangle$. Но $\overline{\widetilde{\varphi}} = \overline{\widetilde{\varphi}} \cdot \gamma = R_\gamma \circ \overline{\widetilde{\varphi}}$ [формула

(0.3.I4)] , а в силу аффинности R_γ [см. (0.4.45), где надо положить $\psi = \overline{\widetilde{\varphi}} \in P(\widetilde{M}; \widetilde{pt}, \gamma^{-1})$)] имеем: $\widetilde{T}_{R_\gamma \cdot \overline{\widetilde{\varphi}}} (R_\gamma)_{*,\widetilde{pt}} X = (R_\gamma)_{*,\gamma^{-1}} \widetilde{T}_{\overline{\widetilde{\varphi}}} X$, откуда уже окончательно получаем:

$$\langle \gamma \cdot \alpha_0 , X \rangle = \langle \alpha_0 , (R_\gamma)_{*,\gamma^{-1}} \widetilde{T}_{\overline{\widetilde{\varphi}}} X \rangle. \qquad (3.I8)$$

Сравнивая (3.I7) и (3.I8), приходим к выводу о справедливости следующего утверждения:

Лемма 3.2. Для элементов $h \in HL(M, \nabla, pt)$ и $\gamma \in \pi_1(M)$, соответствующих одной и той же петле $\varphi \in \Omega(M, pt)$, т. е. для элементов $h = T_\varphi$, $\gamma = [\varphi]$, их действия [(3.I6) и (3.I4), соответственно] на элемент $\alpha_0 \in L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ совпадают, т.е.

$$h \cdot \alpha_0 = \gamma \cdot \alpha_0 \ ; \ \alpha_0 \in L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}). \qquad (3.I9)$$

Замечание 3.I. Подчеркнем еще раз, что для того, чтобы имела смысл левая часть (3.I9), не надо требовать $\alpha_0 \in L^{(HL_0)}$, тогда как для правой части это требование необходимо, поскольку в само определение действия (3.I4) входит оператор $\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}$, заданный лишь на $L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$.

Из леммы 5.2 немедленно вытекает

Следствие 5.I:

$$[[L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{HL_0(M,\nabla,pt)}]^{\pi_1(M)} = [L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})]^{HL(M,\nabla,pt)} \qquad (3.20)$$

Символом $L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ мы будем обозначать любое из пространств инвариантов, совпадающих в силу (3.20).

Замечание 3.2. Как известно (см. § 0.4, п. 7), связность ∇ порождает эпиморфизм групп

$$\nabla^\# : \pi_1(M) \longrightarrow HL(M, \nabla, pt) / HL_0(M, \nabla, pt) \qquad (3.2I)$$

с помощью формулы

$$\nabla^\#(\gamma) = \{T_\varphi\} , \qquad (3.22)$$

где $\gamma = [\varphi] \in \pi_1(M)$, а $\{T_\varphi\}$ – фактор-класс элемента $T_\varphi \in HL$ в фактор-группе HL / HL_0 .

Действие (3.I6) группы HL на $L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ факторизуется до действия фактор-группы HL / HL_0 на пространстве HL_0 – инвариантов $L^{(HL_0)}$. Можно доказать, слегка видоизменяя рассуждения, приведшие к доказательству леммы 3.2, что описанное фактор-действие, взятое в суперпозиции с гомоморфизмом (3.2I), приведет в точности к действию (5.I3) группы $\pi_1(M)$ на пространстве $L^{(HL_0)}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$.

Подводя итог рассуждениям с группами голономии, сформулируем

Предложение 3.3. Имеет место коммутативная диаграмма, составленная из изоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
{[\Lambda^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})]^{\pi_1(M)}} \arrow[r, shift left, "V_{\widetilde{pt}}"] & L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) \arrow[l, shift left, "\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}"] \\
\Lambda^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{A}) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, shift left, "V_{pt}"] & L^{(HL)}(T_{pt}M, \mathfrak{A}) \arrow[l, shift left, "S_{pt}"] \arrow[u, "\pi^*_{\cdot pt}"']
\end{tikzcd} \qquad (3.23)$$

Для множеств вполне интегрируемых форм и соответствующих множеств ковекторов см. (2.22) получим коммутативную диаграмму из взаимно-однозначных отображений:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{L}^1_{const}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; \mathfrak{A})]^{\pi_1(M)}} \arrow[r, shift left, "V_{\widetilde{pt}}"] & \mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) \arrow[l, shift left, "\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}"] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{A}) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, shift left, "V_{pt}"] & \mathcal{L}^{(HL)}(T_{pt}M, \mathfrak{A}) \arrow[l, shift left, "S_{pt}"] \arrow[u, "\pi^*_{\cdot pt}"']
\end{tikzcd} \qquad (3.24)$$

где $\mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) = L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) \cap V_{\widetilde{pt}}(\mathcal{L}^1(\widetilde{M}, \mathfrak{A}))$.

Замечание 3.3. Множество $\mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A})$ при условии $\widetilde{\nabla} \widetilde{Tor} = 0$ [что, в силу равенства $\widetilde{\nabla} \widetilde{Tor} = \widetilde{\nabla Tor}$, легко выводимого из (3.3), и инъективности π^* , эквивалентно $\nabla Tor = 0$ может быть описано в духе предложения 2.3:

$$\mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) = \{\alpha_0 \in L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}, \mathfrak{A}) : \langle \alpha_0, \widetilde{Tor}_0(X,Y) \rangle = [\langle \alpha_0, X \rangle, \langle \alpha_0, Y \rangle]\}. \qquad (3.25)$$

Пример 3.I. Если M – многообразие с абсолютным параллелизмом $\Pi = \{X_1, \ldots, X_m\}$ (см. § 0.4, п. I2), то изоморфизм (0.3.I9) определяет $\pi_1(M)$ – инвариантный накрывающий параллелизм $\widetilde{\Pi} = \{\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_m\}$ на $\widetilde{M}$, причем для соответствующих прямых связностей имеем, как нетрудно доказать, $\nabla^{(\widetilde{\Pi})} = \widetilde{\nabla^{(\Pi)}}$. Объединяя предложения 2.1, 2.3, 3.3, получим в этой ситуации

Предложение 3.4. Имеет место коммутативная диаграмма, составленная из взаимно-однозначных отображений:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1_{const}(\widetilde{M},\widetilde{\Pi},\mathfrak{a}) \arrow[r, shift left, "V_{\widetilde{pt}}"] & \mathcal{L}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{a}) \arrow[l, shift left, "\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}"] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M,\Pi;\mathfrak{a}) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, shift left, "V_{pt}"] & \mathcal{L}(T_{pt}M,\mathfrak{a}) \arrow[l, shift left, "S_{pt}"] \arrow[u, "\pi^*_{\cdot pt}"']
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.26}$$

Замечание 3.4. Любая постоянная форма на $(\widetilde{M},\widetilde{\Pi})$ $\pi_1(M)$ - инвариантна [в силу $\pi_1(M)$ - инвариантности $\widetilde{\Pi}$] и, следовательно, опускается на M. Любой ковектор из $L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{a})$ продолжается до постоянной формы. До вполне интегрируемых постоянных форм продолжаются ковекторы из $\mathcal{L}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{a})$. Это последнее множество может в случае постоянных структурных функций быть описано как в предложении 2.6.

Конкретизируя пример 3.1, рассмотрим

Пример 3.2. Пусть $M=G/\Gamma$ - однородное пространство связной односвязной группы Ли G по дискретной подгруппе Γ (см. § 0.3, п. 6). В этом случае мы имеем накрытие $G=\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M = G/\Gamma$ и $\pi_1(M)=\Gamma$. Правый параллелизм Π_{right} на G (см. § 0.4, п. 13) правоинвариантен и, в частности, $\pi_1(M)$ - инвариантен, следовательно (см. пример 3.1), может быть спущен до некоторого параллелизма Π на однородном пространстве, составленном из левых классов смежности.

Предложение 3.4 с учетом предложения 2.7 превратится в этой ситуации в

Предложение 3.5. Имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1_{const}(G,\Pi_{right};\mathfrak{a}) \arrow[r, shift left, "V_1"] & Hom_{Lie\ alg.}(\mathfrak{g},\mathfrak{a}) \arrow[l, shift left, "S_1"] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M,\Pi;\mathfrak{a}) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, shift left, "V_{pt}"] & \mathcal{L}(T_{pt}M,\mathfrak{a}) \arrow[l, shift left, "S_{pt}"] \arrow[u, "\pi^*_{\cdot pt}"']
\end{tikzcd} \quad . \tag{3.27}$$

§ 4. Аффинные отображения в группу Ли и постоянные формы

Изучим теперь аффинные отображения из многообразия линейной связности (M, ∇) в связную группу Ли A, с заданным на ней правым параллелизмом Π_{right} (см. § 0.4, п. 13).

Пусть $\psi \in P(M)$ - некоторая кривая в многообразии M. Оператор параллельного переноса $T_{f\circ\psi}$ в многообразии (A, Π_{right}) на самом деле не зависит от кривой, а определяется только ее концами $f(\psi(0))$ и $f(\psi(1))$ и представляет собой (см. (0.4.61)) дифференциал правого сдвига:

$$T_{f\circ\psi} = (R_{((f\circ\psi)(0))^{-1}(f\circ\psi)(1)})_{*,(f\circ\psi)(0)} . \tag{4.1}$$

Равенство (0.4.45) с учетом (4.1) примет следующий вид:

$$f_{*,\psi(1)} T_\psi X = (R_{((f\circ\psi)(0))^{-1}(f\circ\psi)(1)})_{*,(f\circ\psi)(0)} f_{*,\psi(0)} X . \tag{4.2}$$

Применив к (4.2) оператор $(R_{((f\circ\psi)(1))^{-1}})_{*,(f\circ\psi)(1)}$, получим эквивалентное равенство

$$(R_{((f\circ\psi)(1))^{-1}})_{*,(f\circ\psi)(1)} f_{*,\psi(1)} T_\psi X = (R_{((f\circ\psi)(0))^{-1}})_{*,(f\circ\psi)(0)} f_{*,\psi(0)} X . \tag{4.3}$$

В обеих частях равенства (4.3) нетрудно увидеть [см. формулу (1.3.2)] значения дифференциальной формы Df в соответствующих точках, а именно:

$$\langle (Df)(\psi(1)), T_\psi X \rangle = \langle (Df)(\psi(0)), X \rangle . \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) должно выполняться для любой кривой ψ, а это эквивалентно [см. (2.6)] тому, что форма Df постоянна (самопараллельна).

Таким образом, доказана

Теорема 4.1. Отображение $f \in C^\infty(M,A)$ является аффинным относительно связности ∇ в M и правого параллелизма Π_{right} в A тогда и только тогда, когда дифференциальная форма Df на M со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ группы A является постоянной, т.е.:

$$[f \in Aff(M,\nabla; A,\Pi_{right})] \Longleftrightarrow [\nabla(Df) = 0] . \tag{4.5}$$

Замечание 4.1. Формула (0.4.47) для случая аффинных отображений $f: M \to A$, переводящих отмеченную точку $pt \in M$ в единицу $1 \in A$, дает следующую коммутативность:

$$f(\operatorname{Exp}_{pt} X) = \exp f_{*,pt}(X) \quad ; \quad X \in T_{pt}M , \tag{4.6}$$

где $\exp: \mathfrak{a} \to A$ - экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в соответствующую группу Ли.

Пример 4.1. Пусть $M=G$ - группа Ли с правым параллелизмом Π_{right}. Определение (4.2) аффинного отображения $f \in Aff(G, \Pi_{right}; A, \Pi_{right})$ дает в этом случае

$$f_{*,g_2}(R_{g_1^{-1}g_2})_{*,g_1}X=(R_{(f(g_1))^{-1}f(g_2)})_{*,f(g_1)}f_{*,g_1}X\ ;\ g_1,g_2\in G,\ X\in T_{g_1}G \quad (4.7)$$

(оба параллельных переноса не зависят от вида кривой, а определяются лишь ее концами), что, в силу правила дифференцирования сложной функции (0.I.59), эквивалентно

$$(f\circ R_{g_1^{-1}g_2})_{*,g_1}=(R_{(f(g_1))^{-1}f(g_2)}\circ f)_{*,g_1}\ ;\ g_1,g_2\in G. \quad (4.8)$$

Очевидно, гомоморфизм групп Ли $f: G\longrightarrow A$ удовлетворяет условию

$$f\circ R_{g_1^{-1}g_2} = R_{(f(g_1))^{-1}f(g_2)}\circ f \quad (4.9)$$

и, тем более, условию (4.8), и, следовательно, является аффинным отображением. Далее, отображение вида $R_a\circ f$, где $a\in A$, $f\in Hom(G,A)$, также удовлетворяет (4.9). Докажем, что это самый общий вид аффинных отображений из (G,Π_{right}) в (A,Π_{right}). Пусть $f\in Aff(G,\Pi_{right}\ ;\ A,\Pi_{right})$. Очевидно, что правые сдвиги являются аффинными преобразованиями правых параллелизмов и что композиция аффинных отображений снова есть аффинное отображение. Поэтому в скобках, в правой и левой частях равенства (4.8), стоят аффинные отображения. Возьмем в (4.8) $g_1=1$, $g_2=g$. Получим

$$(f\circ R_g)_{*,1}=(R_{(f(1))^{-1}f(g)}\circ f)_{*,1}\ . \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что сами аффинные отображения $f\circ R_g$ и $R_{(f(1))^{-1}f(g)}\circ f$ совпадают в точке I, а в силу (4.10) в точке I совпадают и их дифференциалы. По свойству аффинных отображений (см. § 0.4, п. 10) они совпадают тождественно, т. е.

$$f\circ R_g = R_{(f(1))^{-1}f(g)}\circ f\ \ ;\ g\in G\ . \quad (4.11)$$

или

$$f(g'g) = f(g')(f(1))^{-1}f(g)\ \ ;\ \ g,g'\in G\ . \quad (4.12)$$

Если теперь определить отображение $f': G\rightarrow A$ равенством $f'(g)=(f(g))(f(1))^{-1}$, то из (4.12) легко вывести, что f' будет гомоморфизмом групп, и, таким образом, будет доказано следующее

<u>Предложение 4.I</u>. Всякое аффинное отображение $f\in Aff\,(G,\Pi_{right}\,;A,\Pi_{right})$ можно представить в виде

$$f=R_a\circ f'\ ;\quad a=f(1)\in A\ ;\ f'\in Hom\,(G,A)\ . \quad (4.13)$$

В частности $(f(1)=1)$ справедливо

<u>Следствие 4.I</u>. $Aff_0(G,\Pi_{right}\,;A,\Pi_{right})=Hom\,(G,A)$. (4.14)

§ 5. <u>Аффинные отображения и фундаментальные решения л. д. у. с постоянными коэффициентами</u>

Сначала мы переформулируем теорему 4.I в терминах л. д. у. Пусть $\Phi\in\mathfrak{F}_A(M)=C^\infty(M,A)$. Обозначим

$$\alpha = D\Phi\ . \quad (5.I)$$

По свойству I.3.4 оператора D форма α вполне интегрируема. А теорема 4.I утверждает, что эта форма постоянна в том и только том случае, когда Φ – аффинное отображение. Таким образом, справедливо

<u>Предложение 5.I</u>. Аффинными отображениями многообразия M в группу Ли A являются решения вполне интегрируемых л. д. у. вида (5.I) с постоянными формами α , и только они.

Пусть, наоборот, задана форма $\alpha\in\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{A})$. Если многообразие M односвязно, то имеется взаимно-однозначное соответствие (I.6.I8), которое сужается до взаимно-однозначного соответствия

$$Aff_0(M,\nabla;A,\Pi_{right})\ \underset{\int}{\overset{D}{\rightleftarrows}}\ \mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A})\ , \quad (5.2)$$

где $Aff_0(M,\nabla;A,\Pi_{right})$– подмножество множества аффинных отображений, состоящее из отображений, переводящих отмеченную точку $pt\in M$ в единицу $1\in A$.

Если многообразие M не односвязно, то приходится подниматься на универсальное накрывающее многообразие $\widetilde{M}$. В этом случае диаграмма (I.6.I9) сужается следующим образом:

<u>Предложение 5.2</u>. Имеет место следующая коммутативная диаграмма, составленная из взаимно-однозначных отображений

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{L}^1_{const}(\widetilde{M},\widetilde{\nabla};\mathfrak{A})]^{\pi_1(M)}} \arrow[r, shift left, "\int"] & \widehat{Aff}(\widetilde{M},\widetilde{\nabla};A,\Pi_{right}) \arrow[l, shift left, "D"] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A}) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[ur, "\widetilde{\int}"'] &
\end{tikzcd} \quad (5.3)$$

где $\widehat{Aff}=Aff\cap\widehat{\mathfrak{F}}_A$.

Комбинируя предложения 3.3 и 5.2 и сшивая соответствующие диаграммы (3.24) и (5.3), получим следующий результат.

<u>Теорема 5.I</u>. Имеет место коммутативная диаграмма, составленная из взаимно-однозначных отображений:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{inv}(T_{pt}M,\mathfrak{A}) \arrow[r, "\pi^*_{,pt}"] \arrow[d, shift right, "S_{pt}"'] & \mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A}) \arrow[d, shift right, "\widetilde{S}_{\widetilde{pt}}"'] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A}) \arrow[u, shift right, "V_{pt}"'] \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[dr, "\widetilde{\int}"'] & {[\mathcal{L}^1_{const}(\widetilde{M},\widetilde{\nabla};\mathfrak{A})]^{\pi_1(M)}} \arrow[u, shift right, "V_{\widetilde{pt}}"'] \arrow[d, shift right, "\int"'] \\
 & \widehat{Aff}(\widetilde{M},\widetilde{\nabla};A,\Pi_{right}) \arrow[u, shift right, "D"'] \arrow[uu, bend right=60, "{}_{*,\widetilde{pt}}"']
\end{tikzcd}
\qquad (5.4)
$$

<u>Замечание 5.I</u>. Дополнительная стрелка в правой части (5.4) появилась, так как $\langle (V_{\widetilde{pt}}\cdot D)(\Phi), X\rangle = \langle (D\Phi)(\widetilde{pt}), X\rangle = \Phi_{*,\widetilde{pt}}(X)$; $X\in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$.

Переформулировкой теоремы 5.I получается

<u>Теорема 5.2.</u> Аффинное отображение $\Phi\in Aff(\widetilde{M},\widetilde{\nabla};A,\Pi_{right})$ тогда и только тогда является фундаментальным решением некоторой вполне интегрируемой (и автоматически-постоянной) формы на M , когда выполнено любое из эквивалентных условий:

(i) $\Phi(y\cdot\gamma)=\Phi(y)\,\Phi(\gamma)$; $y\in\widetilde{M}$, $\gamma\in\pi_1(M)$;

(ii) $\Phi_{*,\widetilde{pt}}\in\mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A})$;

(iii) $\Phi_{*,\widetilde{pt}}\in[\,L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A})]^{Hl(M,\nabla,pt)}$;

(iv) $\Phi_{*,\widetilde{pt}}\in[[\,L(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A})]^{Hl_0(M,\nabla,pt)}]^{\pi_1(M)}$

<u>Доказательство</u>. Эквивалентность того, что $\Phi\in\mathrm{Im}\,\widetilde{\int}$, одному из утверждений (i) или (ii) непосредственно видна из диаграммы (5.4). В утверждениях (iii) и (iv) двумя [эквивалентными в силу (3.20)] способами расписано условие $\Phi_{*,\widetilde{pt}}\in L_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A})$, а то, что на самом деле ковектор $\Phi_{*,\widetilde{pt}}$ лежит в более узком множестве $\mathcal{L}_{inv}(T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M},\mathfrak{A})$, в данном случае выполняется автоматически, ибо этот ковектор произошел из некоторого отображения Φ и, следовательно, представляет собой сужение в точку $\widetilde{pt}$ вполне интегрируемой формы $D\Phi$. Таким образом, любое из условий (iii), (iv) эквивалентно (ii). Теорема доказана.

<u>Пример 5.I</u>. Диаграмма (5.4) в условиях примера 3.2 и с учетом следствия 4.I примет следующий вид.

<u>Предложение 5.3</u>. Имеет место коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(T_{pt}M,\mathfrak{A}) \arrow[r, "\pi^*_{,pt}"] \arrow[d, shift right, "S_{pt}"'] & \mathrm{Hom}_{Lie\,alg}(\mathfrak{g},\mathfrak{A}) \arrow[d, shift right, "S_1"'] \\
\mathcal{L}^1_{const}(M,\Pi;\mathfrak{A}) \arrow[u, shift right, "V_{pt}"'] \arrow[r, dashed, "\pi^*"] \arrow[dr, "\widetilde{\int}"'] & \mathcal{L}^1_{const}(G,\Pi_{right};\mathfrak{A}) \arrow[u, shift right, "V_1"'] \arrow[d, shift right, "\int"'] \\
 & \mathrm{Hom}(G,A) \arrow[u, shift right, "D"'] \arrow[uu, bend right=60, "{}_{*,1}"']
\end{tikzcd}
\qquad (5.5)
$$

§ 6. <u>Гомоморфизмы монодромии постоянных форм</u>

Пусть $\alpha\in\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A})$. Гомоморфизм монодромии

$$\alpha^{\#}\ :\ \pi_1(M)\longrightarrow A \qquad (6.1)$$

можно (см. § I.5, I.6) определить двумя эквивалентными способами: либо с помощью мультипликативного интегрирования:

$$\alpha^{\#}(\gamma)=\int_\varphi\alpha\ \ ;\ \ [\varphi]=\gamma\in\pi_1(M)\ , \qquad (6.2)$$

либо с помощью фундаментальных решений:

$$\alpha^{\#}(\gamma)=\Phi_\alpha(\gamma)\ ;\quad D\Phi_\alpha=\widetilde{\alpha}\ . \qquad (6.3)$$

Предположим, что многообразие (M , ∇) полно. Это (см. § 4) эквивалентно полноте ($\widetilde{M}$, $\widetilde{\nabla}$). В частности (см. § 0.4, п. 9), отображения $\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}$ и Exp_{pt} определены на всем пространстве ($T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$ и $T_{pt}M$, соответственно), причем коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}"] \arrow[d, "\pi_{*,\widetilde{pt}}"'] & \widetilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\
T_{pt}M \arrow[r, "Exp_{pt}"] & M
\end{tikzcd}
\ . \qquad (6.4)
$$

Предположим дополнительно, что отображение $\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}$ сюръективно, т. е. для любой точки $y\in\widetilde{M}$ найдется $Y\in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$, такое что $\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}Y=y$ и, следовательно, найдется геодезическая

$$\psi_y(t)=\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}\,tY\ \ ;\ \ Y\in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}\ , \qquad (6.5)$$

соединяющая точки $\widetilde{pt}$ и y [$\psi_y=\psi_{\widetilde{x},\gamma}$ в обозначениях (0.4.43)] . Тогда, очевидно, отображение Exp_{pt} также будет сюръективным и, более того, в любом гомотопическом классе $[\varphi]$, где $\varphi\in P(M;pt,x)$, найдется геодезическая $\varphi_x\sim\varphi$ [действительно, пусть $\widetilde{\varphi}$ – поднятие пути φ на $\widetilde{M}$, в силу сюръективности $\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}$ найдется вектор $Y\in T_{\widetilde{pt}}\widetilde{M}$, такой, что $\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}Y=\widetilde{\varphi}(1)$; геодезическая $\psi(t)=\widetilde{Exp}_{\widetilde{pt}}\,tY$ закончивается в той же точке, что и поднятие $\tilde{\varphi}(t)$ пути $\varphi(t)$, следовательно, пути $\varphi(t)$ и $(\pi\circ\psi)(t)=\pi(\widetilde{\mathrm{Exp}}_{\tilde{pt}}\,tY)=\mathrm{Exp}_{pt}\,\pi_{*,\tilde{pt}}(tY)$ гомотопны, и путь $\pi\circ\psi$ есть искомая геодезическая в гомотопическом классе $[\varphi]$].

В силу сюръективности $\widetilde{\mathrm{Exp}}_{\tilde{pt}}$ для любого $\gamma\in\pi_1(M)$ найдется $Y_\gamma\in T_{\tilde{pt}}\tilde{M}$, такое, что

$$\widetilde{\mathrm{Exp}}_{\tilde{pt}}\,Y_\gamma=\gamma. \tag{6.6}$$

Таких векторов Y_γ может быть не один - мы выбираем любой. По свойству (4.6) аффинных отображений: $\alpha^{\#}(\gamma)=\Phi_\alpha(\gamma)=\Phi_\alpha(\widetilde{\mathrm{Exp}}_{\tilde{pt}}Y_\gamma)=$

$$=\exp(\Phi_\alpha)_{*,\tilde{pt}}Y_\gamma=\exp\langle(D\Phi_\alpha)(\tilde{pt}),Y_\gamma\rangle=\exp\langle\mathcal{T}(\tilde{pt}),Y_\gamma\rangle=\exp\langle\alpha_0,Y_\gamma\rangle,$$

или окончательно:

$$\alpha^{\#}(\gamma)=\exp\langle\alpha_0,Y_\gamma\rangle. \tag{6.7}$$

Можем сформулировать

<u>Предложение 6.I</u>. Предположим, что отображение $\widetilde{\mathrm{Exp}}_{\tilde{pt}}$ сюръективно. Гомоморфизм монодромии постоянной формы можно прологарифмировать, т. е. найти такое отображение

$$\alpha^b:\pi_1(M)\longrightarrow\mathfrak{A}, \tag{6.8}$$

что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \arrow[d, "\exp"] \\ \pi_1(M) \arrow[ru, "\alpha^b"] \arrow[r, "\alpha^{\#}"'] & A \end{tikzcd} \tag{6.9}$$

<u>Доказательство</u>. В силу (6.7) можно положить

$$\alpha^b(\gamma)=\langle\alpha_0,Y_\gamma\rangle. \tag{6.10}$$

Отображение α^b определяется, разумеется, не однозначно в силу произвола в выборе Y_γ.

Опишем теперь построение отображения (6.8) на языке мультипликативных интегралов, т. е. считая, что $\alpha^{\#}$ определяется формулой (6.2). Сначала сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

<u>Лемма 6.I</u>. Если $\alpha\in\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A})$ и $\varphi:[0,1]\longrightarrow M$ геодезическая, то $\varphi^*\alpha\in\mathcal{L}^1_{const}([0,1],\mathfrak{A})$.

<u>Доказательство</u>. Форма $\varphi^*\alpha=(\varphi^*\alpha)(t)dt$ определяется равенством

$$(\varphi^*\alpha)(t)=\langle\alpha(\varphi(t)),\varphi_*(t)\rangle, \tag{6.11}$$

но φ - геодезическая, поэтому

$$\varphi_*(t)=T_{\varphi_t}\,\varphi_*(0). \tag{6.12}$$

Из (6.II), (6.I2) следует, что

$$(\varphi^*\alpha)(t)=\langle\alpha(\varphi(t)),T_{\varphi_t}\varphi_*(0)\rangle, \tag{6.13}$$

но в силу постоянства α [см. формулу (2.7)]

$$\langle\alpha(\varphi(t)),T_{\varphi_t}\varphi_*(0)\rangle=\langle\alpha(\varphi(0)),\varphi_*(0)\rangle=const. \tag{6.14}$$

Лемма доказана.

Таким образом, вдоль геодезической φ мы получаем одномерное л. д. у.

$$D\phi=\alpha_0 \tag{6.15}$$

с постоянной формой

$$\alpha_0=\langle\alpha(\varphi(0)),\varphi_*(0)\rangle dt. \tag{6.16}$$

Решением уравнения (6.I5) с начальным условием $\phi(0)=1$ является экспонента

$$\phi(t)=\exp t\alpha_0 \tag{6.17}$$

(действительно, касательный вектор к однопараметрической подгруппе (6.I7) [см. § 0.2, п. 6, 7] есть (все равно правый или левый) сдвиг вектора $\alpha_0\in\mathfrak{A}=T_1A$, поэтому $(D\phi)(t)=(R_{\phi(t)})^{-1}_{*,1}\,\phi_*(t)=\alpha_0$).

Мы доказали, таким образом,

<u>Предложение 6.2</u>. Для геодезической $\varphi\in P(M;pt,x)$ и для постоянной формы $\alpha\in\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{A})$ справедливо равенство

$$\int_\varphi \alpha=\exp\langle\alpha(\varphi(0)),\varphi_*(0)\rangle. \tag{6.18}$$

Теперь, если взять петлю $\varphi\in\Omega(M,pt)$, получим для $\gamma=[\varphi]$:

$$\alpha^{\#}(\gamma)=\int_\varphi\alpha=\exp\langle\alpha(pt),X_\gamma\rangle, \tag{6.19}$$

т. е. снова утверждение предложения 6.I [очевидно, $\alpha_0=\mathcal{T}(\tilde{pt})=\pi^*{}_{,pt}\,\alpha(pt)$ и можно взять $Y_\gamma=(\pi_{*,\tilde{pt}})^{-1}X_\gamma$].

Сформулируем теперь следующую теорему, характеризующую гомоморфизмы монодромии постоянных форм (ею мы воспользуемся в главе 4).

<u>Теорема 6.I</u>. Пусть $f:\pi_1(M)\to A$ - некоторый гомоморфизм групп. Гомоморфизм f тогда и только тогда является гомоморфизмом монодромии некоторого вполне интегрируемого л. у. с постоянными коэффициентами, когда он продолжается до аффинного отображения $\Phi:\tilde{M}\to A$, удовлетворяющего одному из эквивалентных условий (i) - (iv) теоремы 5.2, т. е. найдется $\Phi\in Aff_0(\tilde{M},\tilde{\nabla};A,\Pi_{right})$, такое, что

$$\Phi(y\cdot\gamma)=\Phi(y)f(\gamma)\ ;\ y\in\widetilde{M},\ \gamma\in\pi_1(M). \qquad (6.20)$$

Замечание 6.I. Из равенства (6.20) следует, в частности, (при $y=\widetilde{p}$), что

$$\Phi(\gamma)=f(\gamma),\ \gamma\in\pi_1(M); \qquad (6.21)$$

т. е.

$$\Phi\big|_{orb_{\pi_1(M)}\widetilde{p}}=f$$

Доказательство. Если $f=\alpha^{**}$, то в (6.20) надо взять $\Phi=\Phi_\alpha$. По теореме 5.2 это отображение является аффинным. Обратно, если f продолжается до аффинного отображения Φ, то положим $\beta=D\Phi$. Из (6.20) следует $\pi_1(M)$ - инвариантность β и, следовательно, существование формы α на M, такой, что $\beta=\widetilde{\alpha}$, поэтому $\Phi=\Phi_\alpha$. В силу теоремы 5.2 форма $\widetilde{\alpha}\in\mathcal{L}^1_{const}$ и, следовательно, $\alpha\in\mathcal{L}^1_{const}$, а из (6.20) вытекает $f=\alpha^{**}$. Теорема доказана.

ГЛАВА 3

Л.Д.У. НА МНОГООБРАЗИЯХ. ВОПРОСЫ ПРИВОДИМОСТИ

§ I. Замена неизвестной. Эквивалентные формы

Рассмотрим л. д. у.

$$d\Phi=\alpha\Phi, \qquad (I.1)$$

которое эквивалентно уравнению (I.4.I) в случае линейной группы A.

Сделаем в (I.I) линейную замену неизвестной

$$\Psi=Q(x)\Phi, \qquad (I.2)$$

где $Q\in C^\infty(M,A)=\mathcal{F}_A(M)$. Тогда для новой неизвестной получим

$$d\Psi=dQ\cdot\Phi+Q\cdot d\Phi=dQ\cdot\Phi+Q\cdot\alpha\Phi=(dQ\cdot Q^{-1}+Q\alpha Q^{-1})\Psi, \qquad (I.3)$$

т. е. л. д. у. (I.I) перейдет в л. д. у.

$$d\Psi=\beta\Psi, \qquad (I.4)$$

где I-форма $\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ определяется равенством

$$\beta=dQ\cdot Q^{-1}+Q\alpha Q^{-1}. \qquad (I.5)$$

Говорят, что с помощью замены (I.2) л. д. у. (I.I) приводимо к л. д. у. (I.4), форма α приводима к форме β. Иногда (в случае $dim\ M=m=1$) вместо термина приводимость используется термин кинематическое подобие (настоящее подобие получается при

$Q=const$). Очевидно (подробности см. ниже), преобразование

$$\rho(Q)\alpha=dQ\cdot Q^{-1}+Q\alpha Q^{-1} \qquad (I.6)$$

обратимо и задает действие группы $\mathcal{F}_A(M)$ на $\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ и, следовательно, определяет на $\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ отношение эквивалентности. Приводимые друг к другу формы мы иначе будем называть эквивалентными, а преобразование (I.6) калибровочным преобразованием (последний термин имеет физическое происхождение: преобразования такого типа встречаются в теории калибровочных полей, начало которой положено в работах Янга и Миллса).

Обратимся теперь к точным формулировкам в общей ситуации.

Рассмотрим уравнение

$$D\Phi=\alpha \qquad (I.7)$$

и произведем в нем замену (I.2). Получим в силу свойства I.3.I

$$D\Psi=DQ+(Ad\,Q)D\Phi=DQ+(Ad\,Q)\alpha. \qquad (I.8)$$

Обозначим

$$\rho(Q)\alpha=DQ+(Ad\,Q)\alpha\ ;\ \alpha\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a});\ Q\in\mathcal{F}_A(M). \qquad (I.9)$$

Формула (I.9) задает преобразование I-форм, которое мы будем называть калибровочным.

Предложение I.I. Формула (I.9) определяет действие группы $\mathcal{F}_A(M)$ на пространстве $\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$.

Доказательство. Действительно, $\rho(Q_1Q_2)\alpha=D(Q_1Q_2)+$

$+(Ad(Q_1Q_2))\alpha=DQ_1+(AdQ_1)DQ_2+(AdQ_1)(AdQ_2)\alpha=DQ_1+$
$+(AdQ_1)(DQ_2+(AdQ_2)\alpha)=DQ_1+(AdQ_1)\rho(Q_2)\alpha=\rho(Q_1)\rho(Q_2)\alpha$, т. е.

$$\rho(Q_1Q_2)=\rho(Q_1)\rho(Q_2), \qquad (I.10)$$

что и требовалось доказать.

Орбиты действия (I.9) будем обозначать $orb_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha$, или просто $orb\ \alpha$.

Определение I.I. Две формы назовем эквивалентными или приводимыми одна к другой, если они принадлежат одной орбите действия (I.9).

Запись будет принята следующая: $\alpha\overset{\mathcal{F}_A(M)}{\sim}\beta$, или просто $\alpha\sim\beta$, если исключена возможность путаницы с другими, аналогично обозначаемыми отношениями. Имеем

$$\mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha = \{\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a}) : \beta \overset{\mathcal{F}_A(M)}{\sim} \alpha\} = \qquad \text{(I.11)}$$
$$= \{\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{a}) : \exists Q\in\mathcal{F}_A(M), \rho(Q)\alpha=\beta\} = \rho(\mathcal{F}_A(M))\alpha.$$

Сейчас мы сформулируем основное в данном параграфе предложение, устанавливающее взаимодействие между оператором (I.3.12) и действием (I.9).

<u>Предложение I.2</u>. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\ \mathfrak{D}\ } & \Lambda^2(M,\mathfrak{a}) \\ {\scriptstyle\rho(Q)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\,Q} \\ \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\ \mathfrak{D}\ } & \Lambda^2(M,\mathfrak{a}) \end{array} \qquad \text{(I.12)}$$

где $Q\in\mathcal{F}_A(M)$, $\mathfrak{D}\alpha = d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha,\alpha]$, а действие оператора $\mathrm{Ad}\,Q$ на дифференциальные формы (любой степени) определяется поточечно.

<u>Замечание I.1</u>. Смысл предложения I.2 состоит в том, что отображение $\mathfrak{D}$ переводит действие (I.9) группы $\mathcal{F}_A(M)$ на пространстве $\Lambda^1(M,\mathfrak{a})$ в действие

$$(Q,\xi) \longmapsto (\mathrm{Ad}\,Q)\xi \qquad \text{(I.13)}$$

группы $\mathcal{F}_A(M)$ на пространстве $\Lambda^2(M,\mathfrak{a})$, которое определяется следующим образом:

$$\langle ((\mathrm{Ad}\,Q)\xi)(x); X,Y\rangle = (\mathrm{Ad}\,Q(x))\langle \xi(x); X,Y\rangle, \qquad \text{(I.14)}$$

где $\xi\in\Lambda^2(M,\mathfrak{a})$; $Q\in\mathcal{F}_A(M)$; $x\in M$; $X,Y\in T_xM$ [ср. с определением (I.3.6) аналогичного действия на формах степени I].

Прежде чем приступить к доказательству, мы напомним определения и свойства присоединенных представлений Ad и ad (см. § 0.2, п. 8).

Присоединенное представление Ad является гомоморфизмом

$$A \xrightarrow{\ \mathrm{Ad}\ } \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie\,alg.}}(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \cap GL(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}), \qquad \text{(I.15)}$$

который определяется формулой

$$\mathrm{Ad}\,a = (L_a)_{*,a^{-1}}(R_{a^{-1}})_{*,1} = (R_{a^{-1}})_{*,a}(L_a)_{*,1} \quad ; a\in A. \qquad \text{(I.16)}$$

Дифференциал гомоморфизма групп Ли (I.15) в точке $1\in A$ есть присоединенное представление ad :

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*,1} : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie\,alg.}}(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}), \qquad \text{(I.17)}$$

причем известно, что

$$\mathrm{ad}\,X = [X,\cdot] \quad ; X\in\mathfrak{a}. \qquad \text{(I.18)}$$

Докажем теперь ряд вспомогательных лемм.

<u>Лемма I.I</u>. Дифференциал $d(\mathrm{Ad})$ отображения (I.15) представляет собой $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ -значную I-форму на группе A, которая может быть

вычислена по формуле

$$\langle (d(\mathrm{Ad}))(a), X\rangle = [\langle \omega_{right}(a), X\rangle, (\mathrm{Ad}\,a)\cdot], \qquad \text{(I.19)}$$

где $a\in A$, $X\in T_aA$, ω_{right} – правая форма Маурера-Картана на группе A.

<u>Доказательство</u>. Дифференциал произвольной функции $f: M\to V$ на многообразии M со значениями в векторном пространстве V можно вычислить [см. формулы (0.I.I), (0.I.I0)] по формуле

$$\langle (df)(x), X\rangle = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}, \qquad \text{(I.20)}$$

где $x\in M$, $X\in T_xM$, γ – произвольная кривая в M, такая, что $\gamma(0)=x$, $\gamma_*(0)=X$.

У нас $V=\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$, $M=A$, $f=\mathrm{Ad}$, $x=a$. Рассмотрим вместе с кривой $\gamma(t)$, такой, что $\gamma(0)=a$, $\gamma_*(0)=X$, сдвинутую кривую $\varphi(t) = (L_{a^{-1}}\circ\gamma)(t) = a^{-1}\gamma(t)$. Очевидно, $\varphi(0)=1$ и

$$\varphi_*(0) = (L_{a^{-1}})_{*,a}\gamma_*(0) = (L_{a^{-1}})_{*,a}X = X_0 \in \mathfrak{a}. \qquad \text{(I.21)}$$

Вспоминая определение форм Маурера-Картана (§ 0.2, п. 9) можем заключить, что

$$\varphi_*(0) = X_0 = \langle \omega_{left}(a), X\rangle. \qquad \text{(I.22)}$$

Теперь по формуле (I.20) имеем:

$$\langle (d(\mathrm{Ad}))(a), X\rangle = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(a\varphi(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}((\mathrm{Ad}\,a)(\mathrm{Ad}\,\varphi(t)))\Big|_{t=0} = (\mathrm{Ad}\,a)\frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}\,\varphi(t))\Big|_{t=0} = (\mathrm{Ad}\,a)\langle (d(\mathrm{Ad}))(1), X_0\rangle =$$

$$\overset{(I.18)}{=} (\mathrm{Ad}\,a)\,\mathrm{ad}\,X_0 = (\mathrm{Ad}\,a)[X_0,\cdot] = [(\mathrm{Ad}\,a)X_0, (\mathrm{Ad}\,a)\cdot],$$

где кроме формулы (I.18) использовано то обстоятельство, что отображение (I.15) есть гомоморфизм групп и что каждое $\mathrm{Ad}\,a$ есть гомоморфизм алгебр Ли.

Первый элемент в полученной выше скобке может быть выражен через форму Маурера-Картана:

$$(\mathrm{Ad}\,a)X_0 \overset{(I.16)}{=} (L_a)_{*,a^{-1}}(R_{a^{-1}})_{*,1}(L_{a^{-1}})_{*,a}X =$$

$$= (L_a)_{*,a^{-1}}(L_{a^{-1}})_{*,1}(R_{a^{-1}})_{*,a}X = (R_{a^{-1}})_{*,a}X = \langle \omega_{right}(a), X\rangle,$$

что и завершает доказательство формулы (I.19).

<u>Лемма I.2</u>. Дифференциал $d(\mathrm{Ad}\,Q)$ отображения

$$\mathrm{Ad}\,Q : M \longrightarrow GL(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \qquad \text{(I.23)}$$

представляет собой $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$-значную 1-форму на M, которая может быть вычислена по формуле

$$\langle (d(Ad\,Q))(x), X\rangle = [\langle (DQ)(x), X\rangle, (Ad\,Q(x))\cdot], \qquad (I.24)$$

где $x\in M$, $X\in T_xM$, $D=D_{right}$ – мультипликативный дифференциал (§ 1.3).

Доказательство. Отображение (I.23) может быть представлено в виде

$$Ad\,Q = Ad\circ Q = Q^* Ad, \qquad (I.25)$$

откуда

$$d(Ad\,Q) = d(Q^*Ad) = Q^* d(Ad).$$

Применяя (I.19), получим

$$\langle (d(Ad\,Q))(x), X\rangle = \langle (Q^* d(Ad))(x), X\rangle = \langle (d(Ad))(Q(x)), Q_{*,x}(X)\rangle =$$

$$= [\langle \omega_{right}(Q(x)), Q_{*,x}(X)\rangle, (Ad\,Q(x))\cdot] =$$

$$= [(R_{Q^{-1}(x)})_{*,Q(x)} Q_{*,x}(X), (Ad\,Q(x))\cdot] = [\langle (DQ)(x), X\rangle, (Ad\,Q(x))\cdot],$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.3. Дифференциал $\mathfrak{a}$-значной 1-формы $(Ad\,Q)\alpha$ может быть посчитан по формуле

$$d((Ad\,Q)\alpha) = [DQ, (Ad\,Q)\alpha] + (Ad\,Q)\,d\alpha. \qquad (I.26)$$

Доказательство. $\mathfrak{a}$-значная 1-форма $(Ad\,Q)\alpha$ представляет собой произведение $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$-значной функции (0-формы) $Ad\,Q$ и $\mathfrak{a}$-значной 1-формы α, поэтому

$$d((Ad\,Q)\alpha) = d(Ad\,Q)\wedge\alpha + (Ad\,Q)\,d\alpha, \qquad (I.27)$$

где первое слагаемое правой части (I.27) представляет собой внешнее произведение $\mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$-значной 1-формы на $\mathfrak{a}$-значную 1-форму. С учетом (I.24) получаем для этого внешнего произведения ($x\in M$; $X, Y\in T_xM$):

$$\langle (d(Ad\,Q)\wedge\alpha)(x); X, Y\rangle =$$

$$= \langle (d(Ad\,Q))(x), X\rangle\langle\alpha(x), Y\rangle - \langle (d(Ad\,Q))(x), Y\rangle\langle\alpha(x), X\rangle =$$

$$= [\langle (DQ)(x), X\rangle, (Ad\,Q(x))\cdot]\langle\alpha(x), Y\rangle -$$

$$- [\langle (DQ)(x), Y\rangle, (Ad\,Q(x))\cdot]\langle\alpha(x), X\rangle =$$

$$= [\langle (DQ)(x), X\rangle, (Ad\,Q(x))\langle\alpha(x), Y\rangle] -$$

$$- [\langle (DQ)(x), Y\rangle, (Ad\,Q(x))\langle\alpha(x), X\rangle] =$$

$$= [\langle (DQ)(x), X\rangle, \langle ((Ad\,Q)\alpha)(x), Y\rangle] -$$

$$- [\langle (DQ)(x), Y\rangle, \langle ((Ad\,Q)\alpha)(x), X\rangle] =$$

$$= \langle [DQ, (Ad\,Q)\alpha](x); X, Y\rangle,$$

т. е.

$$d(Ad\,Q)\wedge\alpha = [DQ, (Ad\,Q)\alpha]. \qquad (I.28)$$

Подставляя (I.28) в (I.27), завершаем доказательство (I.26).

Теперь все готово для того, чтобы закончить

Доказательство предложения 1.2. Используя формулы (I.4, I5) и (I.36), а также свойство 1.3.4, получим

$$\mathcal{D}\rho(Q)\alpha = \mathcal{D}(DQ + (Ad\,Q)\alpha) =$$

$$= \mathcal{D}(DQ) + \mathcal{D}((Ad\,Q)\alpha) - [DQ, (Ad\,Q)\alpha] =$$

$$= d((Ad\,Q)\alpha) - \tfrac{1}{2}[(Ad\,Q)\alpha, (Ad\,Q)\alpha] - [DQ, (Ad\,Q)\alpha] =$$

$$= [DQ, (Ad\,Q)\alpha] + (Ad\,Q)\,d\alpha - \tfrac{1}{2}(Ad\,Q)[\alpha,\alpha] - [DQ, (Ad\,Q)\alpha] =$$

$$= (Ad\,Q)(d\alpha - \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha]) = (Ad\,Q)\mathcal{D}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1.2. В случае линейной группы A доказательство предложения 1.2 сводится к простым и автоматическим вычислениям:

$$\mathcal{D}(\rho(Q)\alpha) = \mathcal{D}(dQ\cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1}) =$$

$$= d(dQ\cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1}) - (dQ\cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1})\wedge(dQ\cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1}) =$$

$$= dQ\wedge Q^{-1}dQ\cdot Q^{-1} + dQ\wedge\alpha Q^{-1} + Q\,d\alpha\,Q^{-1} +$$

$$+ Q\alpha\wedge Q^{-1}dQ\cdot Q^{-1} - dQ\cdot Q^{-1}\wedge dQ\cdot Q^{-1} -$$

$$- dQ\wedge\alpha Q^{-1} - Q\alpha Q^{-1}\wedge dQ\cdot Q^{-1} - Q\alpha\wedge\alpha Q^{-1} =$$

$$= Q(d\alpha - \alpha\wedge\alpha)Q^{-1} = Q\cdot\mathcal{D}\alpha\cdot Q^{-1}.$$

Из доказанной коммутативности диаграммы (I.10) немедленно вытекает, что если $\mathcal{D}\alpha = 0$, то и $\mathcal{D}\rho(Q)\alpha = 0$, т. е.

Следствие 1.1. Действие (I.9) переводит вполне интегрируемые формы во вполне интегрируемые.

Коммутативная диаграмма (I.12) для оператора $\mathcal{D}$ может быть "продолжена влево" добавлением аналогичной диаграммы для оператора D:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_A(M) & \xrightarrow{D} & \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) \\ \downarrow{\scriptstyle L_Q} & & \downarrow{\scriptstyle \rho(Q)} \\ \mathcal{F}_A(M) & \xrightarrow{D} & \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) \end{array}, \qquad (I.29)$$

где в левом столбце L_Q означает умножение слева на $Q \in \mathfrak{F}_A(M)$.

Факт коммутативности диаграммы (I.29) очевиден: соответствующее вычисление уже проделано [см. (I.8)], но теперь мы можем объединить (I.29) и (I.12), сформулировав

Предложение I.3. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{F}_A(M) & \xrightarrow{D} & \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\mathfrak{D}} & \Lambda^2(M,\mathfrak{a}) \\ {\scriptstyle L_Q}\downarrow & & {\scriptstyle \rho(Q)}\downarrow & & {\scriptstyle Ad\,Q}\downarrow \\ \mathfrak{F}_A(M) & \xrightarrow{D} & \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) & \xrightarrow{\mathfrak{D}} & \Lambda^2(M,\mathfrak{a}) \end{array} \qquad (I.30)$$

Заметим, что строки диаграммы (I.3) обладают свойством

$$\mathfrak{D} \cdot D = 0\,, \qquad (I.31)$$

т. е. можно сказать, что последовательность

$$\mathfrak{F}_A(M) \xrightarrow{D} \Lambda^1(M,\mathfrak{a}) \xrightarrow{\mathfrak{D}} \Lambda^2(M,\mathfrak{a}) \qquad (I.32)$$

представляет собой комплекс множеств (два последних множества являются векторными пространствами, первое множество есть группа) и набор отображений $\{ L_Q\,,\ \rho(Q)\ ,\ Ad\,Q \}$ определяет гомоморфизм этого комплексов в себя.

Пример I.I. Пусть $A = \mathbb{R}$. В этом случае (см. § I.3) $D = d$ и, так как $\alpha \wedge \alpha = 0$ в силу скалярности значений α, то и $\mathfrak{D} = d$. Поэтому комплекс (I.32) обращается в кусок комплекса де Рама (см. § 0.I, п. I4):

$$\Lambda^0(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M,\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M,\mathbb{R}) \qquad (I.33)$$

Комогологии комплекса (I.33), т. е. первые когомологии де Рама:

$$H^1_{de\,Rham}(M) = {\mathrm{Ker}\{d:\Lambda^1\to\Lambda^2\}} \big/ {\mathrm{Im}\{d:\Lambda^0\to\Lambda^1\}}\,, \qquad (I.34)$$

как известно (теорема де Рама; см., например, 27, 34), изоморфны обычным вещественным когомологиям многообразия M :

$$H^1_{de\,Rham}(M) \simeq H^1(M,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(M),\mathbb{R})\,. \qquad (I.35)$$

В случае комплекса (I.32) аналогом замкнутых форм ($d\alpha = 0$) являются вполне интегрируемые формы ($\mathfrak{D}\alpha = d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0$). В случае (I.33) две замкнутые формы α, β называются когомологичными, если существует такая функция q, что

$$\beta = \alpha + dq\,. \qquad (I.36)$$

Для комплекса (I.32) аналогом понятия когомологичности является понятие эквивалентности (приводимости) форм:

$$\beta = \rho(Q)\alpha = DQ + (Ad\,Q)\alpha\,. \qquad (I.37)$$

Как нетрудно видеть, (I.37) сводится к (I.36) в случае скалярных функций Q.

Таким образом, аналогом фактор-пространства когомологий (I.34) является фактор-множество

$$\mathrm{Ker}\,\mathfrak{D} \big/ \rho(\mathfrak{F}_A(M)) = \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a}) \big/ \rho(\mathfrak{F}_A(M)) \qquad (I.38)$$

по отношению эквивалентности, определяемому действием ρ. В следующем параграфе мы установим аналог теоремы де Рама, связывающий фактор - множество (I.38) с некоторыми когомологиями.

§ 2. Классификация вполне интегрируемых форм с помощью гомоморфизмов монодромии

В § I.5 мы определили отображение (I.5.30), ставящее в соответствие вполне интегрируемой форме ее гомоморфизм монодромии:

$$\# : \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M), A)\,. \qquad (2.I)$$

Эквивалентное определение, использующее понятие фундаментального решения на накрывающем многообразии, дано в § I.6 [формулы (I.6.I5) и (I.6.I6)]. В дальнейшем мы будем в основном использовать второе определение.

Сейчас мы изучим, как "взаимодействуют" отображение (2.I) и действие (I.9) группы $\mathfrak{F}_A(M)$ на множестве $\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})$. Для этого рассмотрим отображение вычисления

$$V_{pt} : \mathfrak{F}_A(M) \longrightarrow A\,, \qquad (2.2)$$

заданное формулой

$$V_{pt}(\Phi) = \Phi(pt)\,. \qquad (2.3)$$

Очевидно, (2.2) есть гомоморфизм групп. Рассмотрим также действие Int группы A на ~~группе~~ множестве $\mathrm{Hom}(\pi_1(M),A)$ внутренними автоморфизмами:

$$((Int\,a)f)(\gamma) = (Int\,a)(f(\gamma)) = a f(\gamma) a^{-1}\,, \qquad (2.4)$$

где $a \in A$; $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M),A)$; $\gamma \in \pi_1(M)$.

Предложение 2.I. Диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a}) \arrow[r, "\#"] \arrow[d, "\rho(Q)"'] & \mathrm{Hom}\,(\pi_1(M),A) \arrow[d, "(\mathrm{Int}\cdot V_{pt})(Q) = \mathrm{Int}\,(Q(pt))"] \\
\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a}) \arrow[r, "\#"] & \mathrm{Hom}\,(\pi_1(M),A)
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

коммутативна, т. е.

$$(\rho(Q)\alpha)^{\#} = Q(pt)\alpha^{\#}Q^{-1}(pt) . \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть Φ_α – фундаментальное решение, соответствующее форме α, т. е. (§ I.6) решение задачи Коши

$$D\Phi_\alpha = \tilde{\alpha} \quad ; \quad \tilde{\alpha} = \pi^*\alpha \ ; \tag{2.7}$$

$$\Phi_\alpha(\tilde{pt}) = 1 \tag{2.8}$$

на накрывающем многообразии $\widetilde{M}$. Найдем фундаментальное решение, соответствующее форме $\rho(Q)\alpha$. Для этого сначала заметим, что

$$\widetilde{\rho(Q)\alpha} = \rho(\tilde{Q})\tilde{\alpha} , \tag{2.9}$$

где $\tilde{Q} = \pi^*Q = Q\circ\pi$ [это следует из (I.3.I7) и (I.9)]. Затем вспомним [см., например, (I.29)], что, если Φ_α –решение уравнения (2.7), то $\Psi = \tilde{Q}\,\Phi_\alpha$ будет решением уравнения

$$D\Psi = \rho(\tilde{Q})\tilde{\alpha} = \widetilde{\rho(Q)\alpha} . \tag{2.10}$$

В отмеченной точке $\tilde{pt}\in\widetilde{M}$ получим

$$\Psi(\tilde{pt}) = \tilde{Q}(\tilde{pt})\,\Phi_\alpha(\tilde{pt}) = Q(\pi(\tilde{pt})) = Q(pt). \tag{2.11}$$

Теперь можно подправить решение Ψ, умножая его справа на постоянную матрицу $Q^{-1}(pt)$, так что оно останется в силу следствия I.3.I из свойств оператора D решением уравнения (2.10), а в точке $\tilde{pt}$ даст единицу и, таким образом, будет доказана следующая

Лемма 2.I. Фундаментальное решение, соответствующее форме $\rho(Q)\alpha$, связано с фундаментальным решением, соответствующим форме α, следующим соотношением:

$$\Phi_{\rho(Q)\alpha}(y) = \tilde{Q}(y)\,\Phi_\alpha(y)\,Q^{-1}(pt) , \tag{2.12}$$

где $y\in\widetilde{M}$, $\tilde{Q}(y) = Q(\pi(y))$.

После этого остается воспользоваться определением (I.6.I5) гомоморфизма монодромии:

$$(\rho(Q)\alpha)^{\#}(\gamma) = \Phi_{\rho(Q)\alpha}(\gamma) = \tilde{Q}(\gamma)\,\Phi_\alpha(\gamma)\,Q^{-1}(pt) =$$
$$= Q(\pi(\gamma))\,\alpha^{\#}(\gamma)\,Q^{-1}(pt) = Q(pt)\,\alpha^{\#}(\gamma)\,Q^{-1}(pt) ,$$

и формула (2.6) доказана.

Коммутативность диаграммы (2.5) позволяет построить фактор-отображение

$$\hat{\#} : \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})\big/\rho(\mathcal{F}_A(M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(\pi_1(M),A)\big/\mathrm{Int}(A) . \tag{2.13}$$

Действительно, положим

$$\hat{\#}(\{\alpha\}) = \{\alpha^{\#}\} . \tag{2.14}$$

Здесь фигурные скобки обозначают классы эквивалентности в соответствующих фактор-множествах: $\{\alpha\} = \mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha$; $\{\alpha^{\#}\} = \mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\alpha^{\#}$. Определение (2.I4) будет корректно, так как в силу (2.6)

$$[\beta = \rho(Q)\alpha] \Rightarrow [\beta^{\#} = (\mathrm{Int}\,Q(pt))\alpha^{\#}] , \tag{2.15}$$

т. е.

$$[\alpha \overset{\mathcal{F}_A(M)}{\sim} \beta] \Rightarrow [\alpha^{\#} \overset{\mathrm{Int}(A)}{\sim} \beta^{\#}] , \tag{2.16}$$

где символом $\overset{\mathrm{Int}(A)}{\sim}$ обозначена эквивалентность, определяемая действием Int группы A на группе гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\,(\pi_1(M),A)$: два гомоморфизма эквивалентны тогда и только тогда, когда они сопряжены (подобны) в группе A .

Утверждение (2.I6) можно пересказать в следующем виде:

Следствие 2.I. Эквивалентные вполне интегрируемые формы имеют сопряженные гомоморфизмы монодромии.

Замечание 2.I об отмеченных точках. Множество $\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})$ не имеет групповой структуры, но в нем есть некоторый аналог групповой единицы – отмеченная точка 0. Очевидно, фундаментальное решение нулевой формы представляет собой тождественную единицу: $\Phi_0 \equiv 1$, и, следовательно, гомоморфизм $0^{\#} = 1$, т. е. отображение $\#$ сохраняет отмеченные точки, переводя нулевую форму 0 в единичный гомоморфизм.

В фактор-множествах $\hat{\mathcal{L}}^1(M,\mathfrak{a}) = \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})/\rho$ и $\widehat{\mathrm{Hom}}\,(\pi_1(M),A) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M),A)/\mathrm{Int}$ отметим образы при проектировании на фактор указанных выше отмеченных точек 0 и I, соответственно. В $\hat{\mathcal{L}}^1 = \mathcal{L}^1/\rho$ отмеченным окажется класс $\hat{0}$ форм, приводимых к нулевой форме, а в $\widehat{\mathrm{Hom}}$ – класс $\hat{1}$ единичного гомоморфизма (состоящий только из него одного), Отображение $\hat{\#}$ будет сохранять выбранные таким образом отмеченные точки.

Замечание 2.2. Из (2.I6) непосредственно следует не только

$$\#(\mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha) \subset \mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\alpha^{\#} , \tag{2.17}$$

но и точное равенство

$$\#(\mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha) = \mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\alpha^{\#}. \tag{2.18}$$

Действительно, пусть $f \in \mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\alpha^{\#}$, т. е.

$$f = Q_0\alpha^{\#}Q_0^{-1} \quad ; \; Q_0 \in A . \tag{2.19}$$

Произведем над $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$ калибровочное преобразование $\rho(Q_0)$ с постоянной функцией $Q_0 = \mathrm{const} \in \mathcal{F}_A(M)$. Тогда в силу (2.15) для формы $\beta = \rho(Q_0)\alpha$ будем иметь

$$\beta^{\#} = (\mathrm{Int}\, Q_0)\alpha^{\#} = Q_0\alpha^{\#}Q_0^{-1} = f . \tag{2.20}$$

Следовательно, $f \in \#(\mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha)$ [даже более того: $f \in \#(\mathrm{orb}_A\alpha)$], что и доказывает включение, обратное к (2.17), и, следовательно, равенство (2.18).

А теперь мы сформулируем основную теорему данной главы:

<u>Теорема 2.1.</u> Две формы $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии сопряжены, т. е.

$$[\alpha \overset{\mathcal{F}_A(M)}{\sim} \beta] \Leftrightarrow [\alpha^{\#} \overset{\mathrm{Int}(A)}{\sim} \beta^{\#}] . \tag{2.21}$$

<u>Доказательство</u>. Заметим сначала, что две формы α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнение (относительно Q)

$$DQ + (\mathrm{Ad}\, Q)\alpha = \beta \tag{2.22}$$

имеет на M A-значное решение. Нетрудно видеть, что это эквивалентно существованию на $\widetilde{M}$ A-значного решения уравнения

$$DK + (\mathrm{Ad}\, K)\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} , \tag{2.23}$$

где $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha$; $\tilde{\beta} = \pi^*\beta$, удовлетворяющего дополнительному условию

$$R_\gamma^* K = K \quad ; \; \gamma \in \pi_1(M) \tag{2.24}$$

[последнее условие дает возможность представить $K \in \mathcal{F}_A(\widetilde{M})$ в виде

$$K = \widetilde{Q} \quad ; \; Q \in \mathcal{F}_A(M) \tag{2.25}$$

и убрать все "волны"].

Далее справедлива

<u>Лемма 2.2</u>. Уравнение (2.23) всегда глобально разрешимо на $\widetilde{M}$, и всякое его решение K может быть представлено в виде

$$K(y) = \Phi_\beta(y)K_0\Phi_\alpha^{-1}(y) \quad ; \; K_0 = K(\tilde{p}) \; ; \; y \in \widetilde{M} . \tag{2.26}$$

<u>Доказательство</u>. Глобальная разрешимость (2.23) на $\widetilde{M}$ следует из того, что выписанное выражение (2.26) представляет собой

решение этого уравнения. Действительно:

$$DK = D(\Phi_\beta K_0 \Phi_\alpha^{-1}) \overset{(1.3.7)}{=} D(\Phi_\beta K_0) + \mathrm{Ad}(\Phi_\beta K_0)D(\Phi_\alpha^{-1}) \underset{(1.3.10)}{\overset{(1.3.8)}{=}}$$
$$= D\Phi_\beta - \mathrm{Ad}(\Phi_\beta K_0)\mathrm{Ad}(\Phi_\alpha^{-1})D\Phi_\alpha = \tilde{\beta} - (\mathrm{Ad}\, K)\tilde{\alpha} .$$

Обратно, если $K(y)$ есть решение уравнения (2.23), то

$$\rho(K)\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} . \tag{2.27}$$

Аналогично тому, как это было сделано в лемме 2.1, получим

$$\Phi_\beta(y) = K(y)\Phi_\alpha(y)K_0^{-1} \quad ; \quad K_0 = K(\tilde{p}) , \tag{2.28}$$

откуда следует представление (2.26). Лемма 2.2 доказана.

Из нее непосредственно выводится

<u>Следствие 2.2</u>. Формы α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется $K_0 \in A$, такое, что функция $K(y)$, определяемая равенством (2.26), удовлетворяет условию (2.24), т. е.

$$K(y \cdot \gamma) = K(y) \quad ; \; y \in \widetilde{M} \; ; \; \gamma \in \pi_1(M) , \tag{2.29}$$

причем эквивалентность форм α и β осуществляется функцией Q, определяемой из равенства (2.25), т. е. $\beta = \rho(Q)\alpha$.

В силу (1.6.28) равенство (2.29) примет вид

$$\Phi_\beta(y)\beta^{\#}(\gamma)K_0[\alpha^{\#}(\gamma)]^{-1}\Phi_\alpha^{-1}(y) = \Phi_\beta(y)K_0\Phi_\alpha^{-1}(y) , \tag{2.30}$$

что эквивалентно условию

$$\beta^{\#}(\gamma)K_0(\alpha^{\#}(\gamma))^{-1} = K_0 , \tag{2.31}$$

или

$$\beta^{\#}(\gamma) = K_0\alpha^{\#}(\gamma)K_0^{-1} , \tag{2.32}$$

т. е. сопряженности гомоморфизмов $\alpha^{\#}$, $\beta^{\#}$, что и доказывает теорему 2.1. [причем сразу в обе стороны, хотя в одну сторону ее утверждение уже было доказано - см. (2.16)].

Из теоремы 2.1 непосредственно вытекает следующее

<u>Предложение 2.2</u>. Отображение (2.13) инъективно.

<u>Доказательство</u>. Предположим, справедливо (2.21). Пусть

$$\#(\{\alpha\}) = \#(\{\beta\}) , \tag{2.33}$$

где $\{\alpha\} = \mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\alpha$; $\{\beta\} = \mathrm{orb}_{\mathcal{F}_A(M)}\beta$. Отсюда по (2.14) получаем:

$$\mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\alpha^{\#} = \mathrm{orb}_{\mathrm{Int}(A)}\beta^{\#}, \tag{2.34}$$

т. е.

$$\alpha^{\#} \overset{\mathrm{Int}(A)}{\sim} \beta^{\#} , \tag{2.35}$$

откуда по (2.21)

$$\alpha \overset{\mathcal{F}_A(M)}{\sim} \beta , \tag{2.36}$$

т. е.

$$\{\alpha\} = \{\beta\} \ . \qquad (2.37)$$

а предложение 2.2 доказано.

<u>Замечание 2.3</u>. На самом деле предложение 2.2 эквивалентно теореме 2.I (в части $\Leftarrow$). Покажем, как вывести теорему 2.I из предложения 2.3: если $\widehat{\#}$ инъективно и выполнено (2.35), то имеем (2.34), а затем (2.33), откуда, в силу инъективности $\widehat{\#}$, получим (2.37), что эквивалентно (2.36), после чего теорема 2.I (в части $\Leftarrow$) доказана.

<u>Замечание 2.4</u>. Фактор-множество $\widehat{\mathrm{Hom}}(\pi_1(M),A)$ можно отождествить с множеством одномерных <u>неабелевых когомологий</u> $H^1(M,A)$ (см. [31]). В явном виде это отждествление строится следующим образом: классу сопряженных гомоморфизмов $\{f\} \in \widehat{\mathrm{Hom}}(\pi_1(M),A)$ ставится в соответствие класс эквивалентности $\hat{\varkappa}(\{f\})$ определяемого по гомоморфизму f <u>локально постоянного расслоенного пространства</u> (накрытия) со слоем A (см. [28]), а этот класс определяется <u>классом когомологических коциклов</u> $\{z\}$ со значениями в группе A (см. [31]).

Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\hat{\mathcal{L}}^1(M,\mathfrak{a}) \arrow[r, "\hat{\zeta}"] \arrow[dr, "\widehat{\#}"'] & H^1(M,A) \\
& \widehat{\mathrm{Hom}}(\pi_1(M),A) \arrow[u, "\approx", "\hat{\varkappa}"']
\end{tikzcd} \qquad (2.38)$$

в которой отображение $\hat{\zeta} = \hat{\varkappa} \circ \widehat{\#}$ может быть задано следующим образом: орбите $\{\alpha\}$ формы α ставится в соответствие класс когомологий коцикла z , задаваемого в некотором покрытии $U = \{U_i\}_{i\in I}$ многообразия M (связными односвязными множествами U_i со связными парными пересечениями $U_i \cap U_j$) формулой

$$z_{ij} = \Phi_i^{-1}(x)\,\Phi_j(x) \ ; \quad x \in U_i \cap U_j \ , \qquad (2.39)$$

где $\Phi_i(x)$ - произвольное решение на множестве U_i уравнения $D\Phi = \alpha|_{U_i}$, а из свойств оператора D (§ I.3) следует, что $z_{ij} = \mathrm{const}$.

В терминах взаимно-однозначного отображения $\hat{\varkappa}$ образ отображения $\widehat{\#}$ описывается так: $\{f\} \in \mathrm{Im}\,\widehat{\#}$ тогда и только тогда, когда определяемое по гомоморфизму f локально постоян-

ное расслоенное пространство $\varkappa(f)$ эквивалентно тривиальному расслоению в классе <u>гладких</u> расслоенных пространств (см. [28, 31, 37]).

В частности, отображение $\widehat{\#}$ сюръективно тогда и только тогда, когда всякое локально постоянное A - расслоение эквивалентно в классе гладких A - расслоений тривиальному расслоению.

Приведем без доказательства (отсылая читателя за подробностями к работе [37]) следующие достаточные условия сюръективности отображения $\widehat{\#}$ (или, эквивалентно, отображения $\#$).

<u>Предложение 2.3</u>. Пусть группа Ли A - связна. Тогда в каждом из следующих случаев отображение $\#$ сюръективно:

(i) - $\pi_1(M)$ - свободная группа;

(ii) - $\pi_1(M)$ - свободная абелева группа; A - компактна и ее когомологии на имеют кручения;

(iii) - $\pi_1(M)$ - свободная абелева группа; A - алгебраическая группа над полем $\mathbb{C}$, не имеющая кручения.

<u>Замечание 2.5</u>. Условие (iii) предложения 2.3 выполняется, в частности, для групп $A = GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $Sp(n,\mathbb{C})$. Условию (ii) удовлетворяют, в частности, группы $A = U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$.

Установим теперь некоторое необходимое условие того, что данный гомоморфизм является гомоморфизмом монодромии некоторого л. д. у.

<u>Предложение 2.4</u>. Если гомоморфизм $f : \pi_1(M) \longrightarrow A$, где A - связная группа Ли, является гомоморфизмом монодромии некоторого л. д. у., то этот гомоморфизм можно накрыть некоторым гомоморфизмом $\tilde{f} : \pi_1(M) \to \widetilde{A}$ в универсальную накрывающую группу группы A .

<u>Доказательство</u>. Пусть $f = \alpha^{\#}$, где $\alpha \in \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{a})$, т. е. $\Phi_\alpha(y\cdot\gamma) = \Phi_\alpha(y)\alpha^{\#}(\gamma)$, $y \in \widetilde{M}$, $\gamma \in \pi_1(M)$, где $\Phi_\alpha : \widetilde{M} \to A$ - фундаментальное решение, соответствующее форме α , т. е. $D\Phi_\alpha = \widetilde{\alpha};\ \Phi_\alpha(\tilde{p}) = 1$. Накрывающая группа $\widetilde{A}$ имеет ту же алгебру Ли $\mathfrak{a}$, что и группа A , поэтому разрешимость уравнения $D\Phi = \alpha$ в A -значных функциях эквивалентна разрешимости этого уравнения в $\widetilde{A}$ -значных функциях. Пусть $\widetilde{\Phi}_\alpha$ есть решение той же начальной задачи, что и Φ_α , но только со значениями в $\widetilde{A}$ т. е. $\widetilde{\Phi}_\alpha : \widetilde{M} \to \widetilde{A}$. Тогда $\pi \circ \widetilde{\Phi}_\alpha = \Phi_\alpha$, где $\pi : \widetilde{A} \to A$ - проекция накрывающей группы, которая является гомоморфизмом групп. Действительно, по свойству (I.3.5) .

$$D(\pi\cdot\widetilde{\Phi}_\alpha) = \pi_{*,1}\cdot D\widetilde{\Phi}_\alpha = \pi_{*,1}\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{I} = D\Phi_\alpha$$

и, кроме того, $(\pi\cdot\widetilde{\Phi}_\alpha)(\tilde{p}) = \pi(\widetilde{\Phi}_\alpha(\tilde{p})) = \pi(1) = 1$. Из существования фундаментального решения $\widetilde{\Phi}_\alpha$ следует, что определен гомоморфизм $\tilde{f} : \pi_1(M)\to\widetilde{A}$ [формулой $\tilde{f}(\gamma) = \widetilde{\Phi}_\alpha(\gamma)$], причем $\pi\cdot\tilde{f} = f$, что и требовалось доказать.

Приведем без доказательства следующее (см. [37])

Предложение 2.5 Условие предложения 2.4 является также и достаточным в каждом из следующих случаев:

(i) - максимальная компактная подгруппа в A абелева;

(ii) - $H^k(M,\mathbb{Z})=0$, $k\geq 4$.

И, наконец, приведем

Пример 2.1 [37] гомоморфизма $f: \pi_1(M)\to A$, который не является гомоморфизмом монодромии никакого л. д. у. Возьмем $M = \mathbb{T}^2$ - двумерный тор, $\pi_1(M)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ - свободная абелева группа с двумя образующими $e_1=(1,0)$ и $e_2=(0,1)$. Возьмем $A=SO(3)$, и пусть гомоморфизм f задается матрицами

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} .$$

Если бы гомоморфизм f являлся гомоморфизмом монодромии какого-нибудь л. д. у. то существовал бы накрывающий гомоморфизм $\tilde{f}: \mathbb{Z}^2\to\widetilde{SO(3)}=SU(2)$. Матрицы $\tilde{f}(e_1), \tilde{f}(e_2)\in SU(2)$ коммутируют и, следовательно, содержатся в одном максимальном торе (коммутативной связной подгруппе) группы $SU(2)$ (см. [16]). Но тогда тем же свойством обладали бы матрицы $f(e_1)$, $f(e_2)\in SO(3)$, что не верно, ибо централизатор матрицы $f(e_1)$ [т. е. множество матриц, коммутирующих с $f(e_1)$] состоит, как нетрудно проверить, из матриц a вида

$$a = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{a'}}\\ 0 & & \end{pmatrix} ,$$

а связная компонента этого централизатора, содержащая саму матрицу $f(e_1)$, состоит, следовательно, из матриц вида

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{a'}}\\ 0 & & \end{pmatrix} ,$$

где $a'\in SO(2)$, и, очевидно, не содержит матрицу $f(e_1)$.

§ 3. Разложения групп Ли и приводимость к формам со значениями в подалгебре

Рассмотрим разложение группы Ли A в произведение пересекающихся лишь по единице подгрупп

$$A = A_1\cdot A_2 \quad ; \quad A_1\cap A_2 = \{1\} . \tag{3.1}$$

Любой элемент $a\in A$ имеет единственное представление:

$$a = a_1 a_2 \quad ; \quad a_i\in A_i \; , \; i=1,2. \tag{3.2}$$

Обозначим $a_1 = P_1(a)$, $a_2 = P_2(a)$. "Проекторы" $P_i : A\to A_i$, $i=1,2$, обладают следующими свойствами:

Предложение 3.1. Пусть $a\in A$, $p\in A_1$, $q\in A_2$. Тогда

$$P_1(a)P_2(a) = a \; ; \tag{3.3}$$

$$P_1(paq) = pP_1(a) \; ; \tag{3.4}$$

$$P_2(paq) = P_2(a)q . \tag{3.5}$$

Доказательство. Свойство (3.3) очевидно в силу определения проекторов P_1, P_2. Далее,

$$pP_1(a)\cdot P_2(a)q = paq = P_1(paq)P_2(paq) ,$$

откуда в силу однозначности разложения (3.2) вытекают (3.4), (3.5).

Предложение 3.2. Пусть элемент $a\in A$ сопряжен некоторому элементу $q\in A_2$. Тогда a A_1 - сопряжен (некоторому другому) элементу $q'\in A_2$.

Доказательство. Пусть $a = bqb^{-1}$, $b\in A$. Тогда $a = b'q'(b')^{-1}$, где $b' = P_1(b)\in A_1$; $q' = P_2(b)q(P_2(b))^{-1}\in A_2$.

Разложение (3.1) группы Ли A порождает разложение

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \quad ; \quad \mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{A}_2 = 0 \tag{3.6}$$

ее алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в сумму пересекающихся лишь по нулю подалгебр.

Действие (1.6) группы $\mathfrak{F}_A(M)$ на $\Lambda^1(M,\mathfrak{A})$ сужается до действия группы $\mathfrak{F}_{A_1}(M)$ на $\Lambda^1(M,\mathfrak{A})$.

Формы $\alpha,\beta\in\Lambda^1(M,\mathfrak{A})$ будем называть A_1 -эквивалентными, если они лежат на одной орбите действия ρ группы $\mathfrak{F}_{A_1}(M)$, т. е. если

$$\beta = \rho(Q)\alpha \quad ; \quad Q\in\mathfrak{F}_{A_1}(M) . \tag{3.7}$$

Для вполне интегрируемых форм $\alpha,\beta\in\mathcal{L}^1(M,\mathfrak{A})$ из (3.7) следует [см. (2.6)]:

$$\beta^{\#}(\gamma) = Q_0 \alpha^{\#}(\gamma) Q_0^{-1} \quad ; \quad Q_0 \in A_1 \ . \tag{3.8}$$

т. е. гомоморфизмы монодромии $\alpha^{\#}, \beta^{\#} \in Hom(\pi_1(M), A)$ A_1-сопряжены. Но (3.8), разумеется, не достаточно для A_1 - эквивалентности (это ясно на тривиальном примере $A_1 = \{1\}$, когда A_1 - сопряженность гомоморфизмов означает их совпадение, а этого явно не достаточно для A_1 - эквивалентности, т. е. совпадения форм). Следовательно, общего описания фактора $\mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A})/\varrho(\mathscr{F}_{A_1}(M))$ в терминах отображения $\#$ получить не удается.

Нас будет, однако, интересовать другая задача: получить условия A_1 - приводимости данной формы $\alpha \in \mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A})$ к некоторой форме со значениями в подалгебре $\mathfrak{A}_2$.

Оказывается, никаких дополнительных условий, кроме тех, которые обеспечивают обычную приводимость к $\mathfrak{A}_2$ -значной форме, не возникает. Точнее, справедлива

Теорема 3.I. Пусть $\alpha \in \mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A})$. Следующие утверждения эквивалентны.

(i)- форма α приводима к $\mathfrak{A}_2$ -значной форме;

(ii)-форма α A_1 - приводима к $\mathfrak{A}_2$ -значной форме;

(iii)-гомоморфизм $\alpha^{\#}$ сопряжен некоторому гомоморфизму группы $\pi_1(M)$ в группу A_2 ;

(iv)-гомоморфизм $\alpha^{\#}$ A_1- сопряжен некоторому гомоморфизму группы $\pi_1(M)$ в группу A_2 .

Доказательство. Заметим прежде всего, что импликации $(ii) \Rightarrow (i)$ и $(iv) \Rightarrow (iii)$ очевидны. Импликация $(i) \Rightarrow (iv)$ уже доказана [см. (3.8)]. Предложение 3.2 позволяет легко установить импликацию $(iii) \Rightarrow (iv)$. Действительно, если гомоморфизм $\alpha^{\#}$ сопряжен некоторому гомоморфизму $h : \pi_1(M) \to A_2$, т. е. $\alpha^{\#}(\gamma) = a h(\gamma) a^{-1}$, $a \in A$, $\gamma \in \pi_1(M)$, то $\alpha^{\#}$ будет также и A_1 -сопряжен некоторому другому гомоморфизму $f : \pi_1(M) \longrightarrow A_2$, а именно:

$$\alpha^{\#}(\gamma) = a_1 f(\gamma) a_1^{-1} \quad ; \quad a_1 \in A_1 \ ; \ f \in Hom(\pi_1(M), A_2) \ , \tag{3.8}$$

где $a_1 = P_1(a)$; $f(\gamma) = P_2(a) h(\gamma) (P_2(a))^{-1}$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, остается доказать импликацию $(iv) \Rightarrow (ii)$. Пусть выполнено (3.8). Рассмотрим функцию $K \in \mathscr{F}_{A_1}(\widetilde{M})$, определенную формулой

$$K(y) = (P_1(\Phi_\alpha(y) a_1))^{-1} \ ; \ y \in \widetilde{M} \ , \tag{3.9}$$

где $\Phi_\alpha(y)$ - фундаментальное решение, соответствующее форме α . Эта функция $\pi_1(M)$ - инвариантна. Действительно,

$$K^{-1}(y\cdot\gamma) = P_1(\Phi_\alpha(y\cdot\gamma) a_1) = P_1(\Phi_\alpha(y) \alpha^{\#}(\gamma) a_1) \overset{(3.8)}{=}$$
$$= P_1(\Phi_\alpha(y) a_1 f(\gamma)) \overset{(3.4)}{=} P_1(\Phi_\alpha(y) a_1) = K^{-1}(y) \ .$$

Следовательно, функцию K можно опустить на M , т. е представить в виде

$$K = \widetilde{Q} \ , \tag{3.10}$$

где $Q \in \mathscr{F}_{A_1}(M)$.

Кроме того,

$$K(\widetilde{pt}) = Q(pt) = a_1^{-1} \ . \tag{3.11}$$

Определим теперь функцию $\Psi \in \mathscr{F}_{A_2}(\widetilde{M})$ формулой

$$\Psi(y) = K(y) \Phi_\alpha(y) K^{-1}(\widetilde{pt}) = (P_1(\Phi_\alpha(y) a_1))^{-1} \Phi_\alpha(y) a_1 = P_2(\Phi_\alpha(y) a_1) . \tag{3.12}$$

Эта функция удовлетворяет условию

$$\Psi(y\cdot\gamma) = \Psi(y) f(\gamma) \ . \tag{3.13}$$

В самом деле, $\Psi(y\cdot\gamma) = K(y\cdot\gamma) \Phi_\alpha(y\cdot\gamma) a_1 = K(y) \Phi_\alpha(y) \alpha^{\#}(\gamma) a_1 \overset{(3.8)}{=}$

$= K(y) \Phi_\alpha(y) a_1 f(\gamma) = \Psi(y) f(\gamma)$. Кроме того,

$$\Psi(\widetilde{pt}) = 1 \ . \tag{3.14}$$

Из (3.I3), (3.I4) вытекает в силу предложения I.6.4, что функция Ψ является фундаментальным решением некоторой формы β на M , причем, так как Ψ есть A_2 -значная функция, то β будет $\mathfrak{A}_2$ -значной формой. Итак,

$$\Psi = \Phi_\beta \quad ; \quad \beta \in \mathscr{L}^1(M, \mathfrak{A}_2) \ . \tag{3.15}$$

и (3.I2) можно переписать, выразив K :

$$K(y) = \Phi_\beta(y) K_0 \Phi_\alpha^{-1}(y) \ ; \quad y \in \widetilde{M} \ , \tag{3.16}$$

где $K_0 = K(\widetilde{pt})$, откуда, в силу $\pi_1(M)$ - инвариантности K и следствия 2.2, можно заключить, что $\beta = \varrho(Q)\alpha$, где функция $Q \in \mathscr{F}_{A_1}(M)$ определяется равенством (3.I0). Мы доказали, что форма α A_1 - приводится к некоторой $\mathfrak{A}_2$ -значной форме, т. е. доказали утверждение (ii), после чего круг импликаций замкнулся, и теорема 3.I доказана полностью.

Замечание 3.I. Приведем некоторую переформулировку теоремы 3.I. Пусть $\alpha \in \mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A})$, $orb\,\alpha = orb_{\mathscr{F}_A(M)}\alpha$, $orb^1\alpha = orb_{\mathscr{F}_{A_1}(M)}\alpha$. Очевидно, $orb^1\alpha \subset orb\,\alpha$. Теорема 3.I утверждает, что если найдется форма $\beta \in \mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A}_2)$, такая, что $\beta \in orb\,\alpha$, то найдется и некоторая другая форма $\beta' \in \mathscr{L}^1(M,\mathfrak{A}_2)$, уже такая, что $\beta' \in orb^1\alpha$.

Замечание 3.2. Разумеется, во всех предложениях этого параграфа группы A_1 и A_2 можно поменять ролями, т. е. A_2 -значными заменами приводить к A_1 -значным формам. Более формально этого можно достигнуть, если перейти от разложения (3.I) к двойственному разложению

$$A = A_2 \cdot A_1 , \tag{3.I7}$$

которое задается проекторами $P_i' : A \to A_i$, $i=1,2$, где

$$P_i'(a) = (P_i(a^{-1}))^{-1}. \tag{3.I8}$$

§ 4. Разложение Грама-Шмидта и обобщенная теорема Перрона

Классическая теорема Перрона утверждает (см.,например, [6, II]), что обыкновенное л. д. у.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha(t)\Phi \tag{4.I}$$

с комплексной матрицей $\alpha(t)$ унитарным преобразованием приводимо к треугольному с вещественной диагональю виду.

Теорема 3.I позволяет решить вопрос о возможности такого приведения для вполне интегрируемых форм на многообразиях, в частности, рассмотреть случай периодических коэффициентов и периодических замен в (4.I).

Процесс ортогонизации Грама-Шмидта устанавливает (см.,например, [5, II]) возможность разложения

$$GL(n,\mathbb{C}) = U(n) \cdot GS(n) , \tag{4.2}$$

где $U(n)$ -группа унитарных матриц; $GS(n)$ - группа верхнетреугольных матриц с вещественной положительной диагональю.

Для алгебр имеется соответствующее разложение:

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) + \mathfrak{gs}(n) , \tag{4.3}$$

где $\mathfrak{u}(n)$ и $\mathfrak{gs}(n)$ - алгебры Ли косоэрмитовых и треугольных с вещественной диагональю матриц.

Определение 4.I. Форма $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ называется приводимой по Перрону, если она $U(n)$ - приводима к какой-либо форме со значениями в $\mathfrak{gs}(n)$.

Применение теоремы 3.I к разложению (4.2) дает следующее утверждение:

Теорема 4.I. Форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ приводима по Перрону

тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}: \pi_1(M) \to GL(n,\mathbb{C})$ сопряжен некоторому гомоморфизму $f: \pi_1(M) \to GS(n)$.

Условия теоремы 4.I упрощаются в случае, когда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ абелева и имеет конечное число образующих.

Теорема 4.2. Пусть $\alpha \in \mathcal{L}^1(M,\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ и $\pi_1(M)$ - абелева группа с конечным числом образующих $\{\gamma_i\}_{i=1}^r$. Рассмотрим $\Phi_i = \alpha^{\#}(\gamma_i)$ - матрицы монодромии вдоль γ_i . Тогда для приводимости по Перрону формы α необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\{\Phi_i\}_{i=1}^r$ все имели вещественный положительный спектр.

Доказательство. Пусть α приводима по Перрону. Тогда по теореме 4.I $\Phi_i = \alpha^{\#}(\gamma_i) = Q_0 f(\gamma_i) Q_0^{-1}$, где $f(\gamma_i) \in GS(n)$ и, следовательно, $\operatorname{spectr} f(\gamma_i) \subset \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t>0\}$. Отсюда

$$\operatorname{spectr} \Phi_i \subset \mathbb{R}^+ ; \quad i=1,\dots,r. \tag{4.4}$$

Обратно, пусть выполнено (4.4). В силу перестановочности образующих γ_i группы $\pi_1(M)$ матрицы $\Phi_i = \alpha^{\#}(\gamma_i)$ также перестановочны, и, по теореме Шура (см., например, [20] , с. III) существует (унитарная) матрица Q_0 , одновременно приводящая матрицы $\{\Phi_i\}_{i=1}^r$ к треугольному виду f_i :

$$\Phi_i = Q_0 f_i Q_0^{-1} \; ; \quad i=1,\dots,r. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что $\operatorname{spectr} f_i \subset \mathbb{R}^+$, а так как f_i треугольна, то отсюда уже вытекает, что $f_i \in GS(n)$.

Построим гомоморфизм $f: \pi_1(M) \to GS(n)$, положив на образующих $f(\gamma_i) = f_i$. Из (4.5) следует, что

$$\alpha^{\#}(\gamma) = Q_0 f(\gamma) Q_0^{-1} , \tag{4.6}$$

откуда, по теореме 5.I, заключаем, что форма α приводима по Перрону.

В частности ($M = \mathbb{T}^1$ - окружность), для уравнения (4.I) с периодической матрицей $\alpha(t)$ получаем

Следствие 4.I. Уравнение (4.I) с периодической матрицей $\alpha(t)$ тогда и только тогда приводимо периодической унитарной заменой к треугольному с вещественной диагональю виду, когда матрица монодромии $\Phi(1)$ уравнения (4.I) имеет вещественный положительный спектр.

Вместе с разложением (4.2) можно рассмотреть (см. замечание 3.2) двойственное разложение

$$GL(n,\mathbb{C}) = GS(n) \cdot U(n), \tag{4.2$'$}$$

и теорема 4.I, примененная к разложению $(4.2)'$, дает следующее утверждение:

Теорема 4.I$'$. Форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ $GS(n)$ – приводима к косоэрмитову виду тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}: \pi_1(M) \to GL(n,\mathbb{C})$ сопряжен некоторому гомоморфизму $f: \pi_1(M) \to U(n)$.

Хорошо (см., например, [16]) известно, что любое представление конечной группы сопряжено унитарному представлению, поэтому условие теоремы 4.I$'$ всегда выполняется для многообразий с конечной фундаментальной группой, и, следовательно, справедливо

Предложение 4.I. На многообразии с конечной фундаментальной группой любая форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ – $GS(n)$ – приводима к косоэрмитову виду.

ГЛАВА 4

ПРИВОДИМОСТЬ Л.Д.У. НА МНОГООБРАЗИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ К ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ЛЯПУНОВА – ФЛОКЕ

§ I. Теория Ляпунова-Флоке для л.д.у. на окружности и на торе

Рассмотрим л.д.у на $\mathbb{R}^1$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha(t)\Phi \qquad (I.I)$$

с периодической (можно считать, что периода I) функцией $\alpha: \mathbb{R}^1 \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ [или, что то же самое, л. д. у. на окружности $\mathbb{T}^1$].

Хорошо известна классическая теорема Ляпунова-Флоке, утверждающая, что в случае $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ любое л. д. у. вида (I.I) с периодической матрицей $\alpha(t)$ можно периодической заменой

$$\Psi = Q(t)\Phi \qquad (I.2)$$

привести к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \beta\Psi \quad ; \quad \beta = const \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \ , \qquad (I.3)$$

причем

$$\beta = \frac{dQ}{dt}\cdot Q^{-1} + Q\alpha Q^{-1} \ . \qquad (I.4)$$

Напомним доказательство этой теоремы. Перепишем (I.4) в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \beta Q - Q\alpha(t) \qquad (I.5)$$

и будем рассматривать (I.5) как уравнение с двумя неизвестными: функцией $Q: \mathbb{R}^1 \to GL(n,\mathbb{K})$, которая должна быть периодичной (с периодом I), и постоянной матрицей $\beta \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Общее решение (I.5) может быть записано [см. (3.2.26)] в виде

$$Q(t) = \Phi_\beta(t) Q_0 \Phi_\alpha^{-1}(t) \ , \qquad (I.6)$$

где Φ_α, Φ_β – фундаментальные решения уравнений (I.I) и (I.3), соответственно. Решение Φ_α обладает свойством

$$\Phi_\alpha(t+1) = \Phi_\alpha(t)\,\Phi_\alpha(1) \ , \qquad (I.7)$$

которое следует из того, что $\alpha(t+1) = \alpha(t)$. Матрица $\Phi_\alpha(1)$ называется матрицей монодромии уравнения (I.I). Ее можно обозначить $\alpha^{\#}(1)$; отображение

$$\alpha^{\#}: \mathbb{Z} \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}) \ , \qquad (I.8)$$

определенное формулой

$$\alpha^{\#}(n) = \Phi_\alpha(n) \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ , \qquad (I.9)$$

является в силу (I.7) гомоморфизмом групп. Решение Φ_β имеет в силу того, что $\beta = const$, вид (см. § 2.I)

$$\Phi_\beta(t) = \exp t\beta \qquad (I.I0)$$

и является гомоморфизмом из $\mathbb{R}$ в $GL(n,\mathbb{K})$.

Можем переписать (I.6) в виде

$$Q(t) = \exp t\beta \cdot Q_0 \cdot \Phi_\alpha^{-1}(t) \ . \qquad (I.II)$$

Нам нужно, чтобы функция $Q(t)$, определяемая равенством (I.II), была периодичной (т. е. $Q(t+1) = Q(t)$). С учетом (I.7) и (I.I0) получаем $\exp(t\beta)\cdot\exp\beta\cdot Q_0\cdot(\alpha^{\#}(1))^{-1}\cdot\Phi_\alpha^{-1}(t) =$

$= \exp t\beta \cdot Q_0 \cdot \Phi_\alpha^{-1}(t)$, что эквивалентно

$$\exp\beta \cdot Q_0 \cdot (\alpha^{\#}(1))^{-1} = Q_0 \ . \qquad (I.I2)$$

В равенстве (I.I2) две неизвестные матрицы: $Q_0 \in GL(n,\mathbb{K})$ и $\beta \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$. Перепишем (I.I2) в виде

$$Q_0^{-1}\cdot \exp\beta \cdot Q_0 = \alpha^{\#}(1) \ ,$$

или (по свойству матричной экспоненты)

$$\exp(Q_0^{-1}\beta Q_0) = \alpha^{\#}(1) \ . \qquad (I.I3)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (I.I3) [и, следовательно, необходимым и достаточным условием приводимости уравнения (I.I) к постоянным коэффициентам] является существование логарифма у матрицы монодромии $\alpha^{\#}$ (I).

Если существует матрица $\alpha^{b}(1) \in gl(n, \mathbb{K})$, такая, что
$$\exp(\alpha^{b}(1)) = \alpha^{\#}(1), \tag{I.14}$$
то в (I.I3) можно, например, взять $Q_0 = 1$, $\beta = \alpha^{b}(1)$, так что (I.II) превратится в
$$Q(t) = \exp t\alpha^{b}(1) \cdot \Phi_{\alpha}^{-1}(t), \tag{I.15}$$
и с помощью такой (периодической) замены уравнение (I.I) приведется к уравнению с постоянными коэффициентами.

Мы доказали, таким образом, следующее утверждение.

Теорема I.I. (Ляпунов, Флоке). Уравнение (I.I) с периодическими коэффициентами тогда и только тогда периодической заменой приводимо к постоянным коэффициентам, когда матрица монодромии этого уравнения имеет логарифм.

Поскольку над полем комплексных чисел ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) любая обратимая матрица логарифмируема (см. [7]), то из теоремы (I.I) вытекает

Следствие I.I. Любое уравнение (I.I) с комплексными периодическими коэффициентами приводимо периодической заменой к постоянным коэффициентам.

Замечание I.I. К случаю вещественных коэффициентов ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), когда не всякая матрица имеет вещественный логарифм, а только такая, спектр которой не попадает на отрицательную вещественную полуось $\mathbb{R}_-$, мы возвратимся в § 3.

А сейчас придадим условию теоремы I.I несколько иной вид, в котором она будет в следующем параграфе обобщена на л. д. у. на многообразиях.

Теорема I. I$'$. Л. д. у. (I.I) с периодическими коэффициентами приводимо периодической заменой к постоянным коэффициентам тогда и только тогда, когда гомоморфизм монодромии (I.8) продолжается до некоторого гомоморфизма групп Ли $F: \mathbb{R}^1 \to GL(n, \mathbb{K})$.

Доказательство. Существование логарифма $\alpha^{b}(1) = \ln \alpha^{\#}(1)$ влечет существование всех дробных степеней
$$(\alpha^{\#}(1))^{t} = \exp(t\alpha^{b}(1)) \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \quad ; \tag{I.16}$$
отображение $t \mapsto (\alpha^{\#}(1))^{t}$ представляет собой искомый гомоморфизм F из $\mathbb{R}^1$ в $GL(n, \mathbb{K})$.

Обратно, если существует гомоморфизм
$$F : \mathbb{R}^1 \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}), \tag{I.17}$$

такой, что
$$F\big|_{\mathbb{Z}} = \alpha^{\#} \quad , \tag{I.18}$$
то
$$\frac{d}{dt}F(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(t+\tau) - F(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(\tau)F(t) - F(t)}{\tau} =$$
$$= \left(\lim_{\tau \to 0} \frac{F(\tau) - 1}{\tau} \right) F(t) = \beta_0 F(t) ,$$
где
$$\beta_0 = \frac{d}{dt} F(t)\Big|_{t=0} . \tag{I.19}$$

Решая л. д. у. $\frac{dF}{dt} = \beta_0 F$ с постоянными коэффициентами, получаем
$$F(t) = \exp t\beta_0 \quad , \tag{I.20}$$
откуда $\alpha^{\#}(1) = F(1) = \exp \beta_0$, т. е. матрица $\alpha^{\#}(1)$ логарифмируема.

Замечание I.2. Уравнение (I.I) с периодическими коэффициентами можно рассматривать как л. д. у. вида
$$D\Phi = \alpha \tag{I. 21}$$
на окружности ($M = \mathbb{T}^1$). Фундаментальная группа окружности $\pi_1(\mathbb{T}^1) = \mathbb{Z}$, и универсальное накрывающее многообразие $\tilde{\mathbb{T}}^1 = \mathbb{R}^1$. Условию теоремы I.I$'$ можно придать следующий вид: гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}$ из фундаментальной группы в группу $GL(n, \mathbb{K})$ должен продолжаться до аффинного отображения (см. § 2.6) из накрывающего многообразия в группу $GL(n, \mathbb{K})$, ибо для случая, когда $\tilde{M}$ есть группа Ли, аффинные отображения, переводящие единицу в единицу, есть в точности гомоморфизмы групп Ли (следствие 2.4.I).

Столь же просто, как и на окружности, решается вопрос о приводимости к постоянным коэффициентам для вполне интегрируемых л. д. у. на торе ($M = \mathbb{T}^m$, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}^m$, $\tilde{M} = \mathbb{R}^m$).

Рассмотрим л. д. у. (I.2I), или эквивалентно
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \alpha_i(x)\Phi \quad ; \quad i = 1, \dots, m \quad , \tag{I.22}$$
на торе, или, что то же самое, такого же вида л. д. у. на $\mathbb{R}^m$ с

формой $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\,dx^i$, которая удовлетворяет условию полной интегрируемости (I.2.10) и коэффициенты которой $\alpha_i(x^1, \dots, x^m)$ периодичны по каждой переменной (все периоды будем считать равными единице).

Фундаментальное решение уравнения (I.22) обладает свойством

$$\Phi_\alpha(x+e_i) = \Phi_\alpha(x)\,\Phi_\alpha(e_i)\ ;\ i=1,\dots,m, \tag{I.23}$$

где $e_i=(0,\dots,1,\dots,0)$ [единица – на i-м месте] – базис фундаментальной группы; $\Phi_\alpha(e_i)=\alpha^\#(e_i)$ – оператор монодромии вдоль i-го меридиана тора.

Приступим к решению вопроса о том, когда л. д. у. (I.22) может быть приведено заменой

$$\Psi = Q(x^1,\dots,x^m)\,\Phi\ , \tag{I.24}$$

где функция $Q(x)$ периодична по всем переменным, т. е.

$$Q(x+e_i) = Q(x)\ ,\ i=1,\dots,m\ , \tag{I.25}$$

к л. д. у.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x^i} = \beta_i\Psi\ ;\ i=1,\dots,m\ . \tag{I.26}$$

где $\beta_i = const \in gl(n,\mathbb{K})$.

Форма $\beta = \sum_{i=1}^{m}\beta_i dx^i$ определяется равенством

$$\beta_i = \frac{\partial Q}{\partial x^i}Q^{-1} + Q\alpha_i(x)Q^{-1}\ ;\ i=1,\dots,m\ , \tag{I.27}$$

откуда

$$\frac{\partial Q}{\partial x^i} = \beta_i Q - Q\alpha_i(x)\ ;\ i=1,\dots,m\ , \tag{I.28}$$

где неизвестны функция $Q:\mathbb{R}^m\to GL(n,\mathbb{K})$ и m постоянных матриц $\{\beta_i\}_{i=1}^m$.

Общий вид решения уравнения (I.28) есть [мы доказали это уже для случая уравнений на многообразиях – см. (3.2.26)]:

$$Q(x)=\Phi_\beta(x)\,Q_0\,\Phi_\alpha^{-1}(x)\ . \tag{I.29}$$

В силу того, что форма β постоянна, имеем [см. (2.I.7)]:

$$\Phi_\beta(x) = \exp\langle\beta, x\rangle\ , \tag{I.30}$$

поэтому (I.29) переходит в

$$Q(x) = \exp\langle\beta,x\rangle\cdot Q_0\cdot\Phi_\alpha^{-1}(x)\ . \tag{I.31}$$

Условие периодичности (I.28) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\exp\left(Q_0^{-1}\beta_i Q_0\right) = \alpha^\#(e_i)\ , \tag{I.32}$$

где $\beta_i = \langle\beta, e_i\rangle$ [при доказательстве (I.32) надо использовать (I.23)].

Необходимым условием разрешимости уравнения (I.32) [и, следовательно, необходимым условием приводимости уравнения (I.22) к постоянным коэффициентам] является существование логарифмов у матриц монодромии $\alpha^\#(e_i)=\Phi_\alpha(e_i)$, т. е. существование таких матриц $\alpha^b(e_i)$, что

$$\exp\alpha^b(e_i) = \alpha^\#(e_i)\ . \tag{I.33}$$

Однако существования логарифмов $\alpha^b(e_i)$ в многомерном случае уже не достаточно. Форма с постоянными коэффициентами β, которая восстанавливается по своим значениям $\beta_i=\langle\beta,e_i\rangle$, должна быть вполне интегрируемой, т. е. [см. (2.I.4)] матрицы β_i должны <u>попарно коммутировать</u>.

Заметим, что сами матрицы монодромии $\alpha^\#(e_i)$ попарно коммутируют, ибо попарно коммутируют образующие e_i фундаментальной группы $\mathbb{Z}^m$ тора T^m.

Можно утверждать, что для существования решения (Q_0, β_1, $\dots,\beta_m$) уравнения (I.32) такого, что матрицы β_i попарно коммутируют, необходимо и достаточно существования набора <u>попарно коммутирующих логарифмов</u> $\alpha^b(e_i)$.

Таким образом, доказана

<u>Теорема I.2</u>. Л.д.у. на торе приводимо к постоянным коэффициентам тогда и только тогда, когда матрицы монодромии $\alpha^\#(e_i)$ имеют попарно коммутирующие логарифмы.

В случае комплексных коэффициентов ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) любые m попарно коммутирующих обратимых матриц имеют попарно коммутирующие логарифмы (см. [7]), и поэтому справедливо

<u>Следствие I.2</u>. Любое уравнение (I.22) с комплексными коэффициентами на торе приводимо к постоянным коэффициентам.

Условию теоремы I.2 можно (так же, как и в случае теоремы I.I) придать другую форму.

<u>Теорема I.2'</u>. Л.д. у. (I.22) на торе приводимо к постоянным коэффициентам тогда и только тогда, когда гомоморфизм монодромии

$$\alpha^\# : \mathbb{Z}^m \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}) \tag{I.34}$$

продолжается до некоторого гомоморфизма групп Ли:

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) \ . \qquad (I.35)$$

Доказательство. Если существуют логарифмы $\alpha^b(e_i)$ матриц $\alpha^{\#}(e_i)$ и эти логарифмы попарно коммутируют, то гомоморфизм (I.35) определяется формулой

$$F(x^1, \dots, x^m) = \exp x^1 \alpha^b(e_1) \cdot \ldots \cdot \exp x^m \alpha^b(e_m) \ . \qquad (I.36)$$

Обратно, если дан гомоморфизм (I.35), такой, что

$$F\big| Z^m = \alpha^{\#} \ , \qquad (I.37)$$

то [вполне аналогично (I.19)] определяются матрицы

$$\beta_i = \frac{\partial F(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=0} \ ; \ i = 1, \dots, m \ . \qquad (I.38)$$

и доказывается, что

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \beta_i F \ ; \ i = 1, \dots, m \ . \qquad (I.39)$$

То, что (I.39) имеет, по предположению, решение (I.35), уже гарантирует полную интегрируемость (I.39). Отсюда, во-первых, следует, что форма $\beta = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i dx^i$ удовлетворяет [см. (2.I.4)] условию

$$[\beta_i, \beta_j] = 0 \quad ; \quad i, j = 1, \dots, m \ , \qquad (I.40)$$

а, во-вторых, получается [см. (2.I.7)] представление решения F уравнения (I.39) в виде

$$F(x) = \exp \langle \beta, x \rangle \ , \qquad (I.4I)$$

откуда, в частности, $\alpha^{\#}(e_i) = F(e_i) = \exp \langle \beta, e_i \rangle = \exp \beta_i$, т. е. матрицы $\alpha^{\#}(e_i)$ имеют логарифмы $\alpha^b(e_i) = \beta_i$, которые, как уже отмечалось, попарно коммутируют.

Замечание I.3. В многомерной ситуации можно (с соответствующими изменениями) повторить замечание I.2 (об аффинных отображениях).

§ 2. Обобщение теории Ляпунова-Флоке на л. д.у. на многообразиях линейной связности

Пусть (M , ∇) - многообразие линейной связности.

Определение 2.I. Дифференциальная форма $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ называется приводимой к постоянной (или просто приводимой), если существует функция $Q \in \mathcal{F}_A(M)$, такая, что форма $\beta = \rho(Q)\alpha \in \Lambda^1_{const}$ $(M, \nabla; \mathfrak{a})$, т. е. если орбита формы α содержит постоянную форму.

Множество всех приводимых форм мы будем обозначать

$$\Lambda^1_{red}(M, \nabla; \mathfrak{a}) = \rho(\mathcal{F}_A(M))\, \Lambda^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a}) \ . \qquad (2.I)$$

Мы будем рассматривать множество вполне интегрируемых приводимых форм

$$\mathcal{L}^1_{red}(M, \nabla; \mathfrak{a}) = \Lambda^1_{red}(M, \nabla; \mathfrak{a}) \cap \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{a}) \qquad (2.2)$$

и установим необходимые и достаточные условия принадлежности формы этому множеству.

Введем понятие представления Флоке для фундаментального решения приводимой вполне интегрируемой формы α . Поскольку форма α приводима, то ее можно представить в виде

$$\alpha = \rho(Q)\beta \quad ; \quad Q \in \mathcal{F}_A(M) \ ; \ \beta \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a}) \qquad (2.3)$$

(в определении 2.I записано наоборот : $\beta = \rho(Q)\alpha$, но это, разумеется, одно и то же, если Q заменить на Q^{-1}).

Из (2.3) получаем [см. (3.2.I2)] соотношение для фундаментальных решений:

$$\Phi_\alpha(y) = \tilde{Q}(y)\, \Phi_\beta(y)\, Q^{-1}(pt) \ ; \ y \in \tilde{M} \ , \qquad (2.4)$$

где $\tilde{Q}(y) = Q(\pi(y))$, и поэтому $\tilde{Q}$ $\pi_1(M)$ - инвариантно

$$\tilde{Q}(y \cdot \gamma) = \tilde{Q}(y) \ ; \ y \in \tilde{M} \ , \ \gamma \in \pi_1(M) \ . \qquad (2.5)$$

Перепишем (2.4) в виде

$$\Phi_\alpha(y) = K(y) \cdot \left(\tilde{Q}(\tilde{pt})\, \Phi_\beta(y)\, Q^{-1}(pt) \right) \ , \qquad (2.6)$$

где

$$K(y) = \tilde{Q}(y)\, Q^{-1}(pt) \ - \qquad (2.7)$$

также $\pi_1(M)$ - инвариантная функция, т. е.

$$K(y \cdot \gamma) = K(y) \ ; \ y \in \tilde{M} \ , \ \gamma \in \pi_1(M) \qquad (2.8)$$

и, кроме того, очевидно,

$$K(\tilde{pt}) = 1 \ , \qquad (2.9)$$

а в выражении, стоящем в (2.6) в скобках, нетрудно усмотреть фундаментальное решение некоторой другой, но тоже постоянной, формы $\beta_1 \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$, которая получается из формы β заменой с постоянной матрицей $Q(pt)$:

$$\beta_1 = \rho(Q(pt))\beta = (Ad\, Q(pt))\beta \ . \qquad (2.I0)$$

Итак, мы имеем следующее представление фундаментального решения Φ_α :

$$\Phi_\alpha(y) = K(y)\,\Phi_{\beta_1}(y) \quad ; \quad y\in\widetilde M, \tag{2.11}$$

в котором первая функция $\pi_1(M)$ - инвариантна, а вторая представляет собой фундаментальное решение, соответствующее некоторой постоянной форме, т. е. второй сомножитель представляет собой (по теореме 2.5.2) аффинное отображение $\Phi_{\beta_1}: \widetilde M \to A$, удовлетворяющее дополнительному условию

$$\Phi_{\beta_1}(y\cdot\gamma) = \Phi_{\beta_1}(y)\,\Phi_{\beta_1}(\gamma) \quad ; \quad y\in\widetilde M,\ \gamma\in\pi_1(M) \tag{2.12}$$

(или любому из эквивалентных уоловий, перечисленных в теореме 2.5.2).

Определение 2.2. Будем говорить, что фундаментальное решение Φ_α допускает представление Флоке, если Φ_α можно представить в виде произведения

$$\Phi_\alpha(y) = K(y)F(y) \quad ; \quad y\in\widetilde M, \tag{2.13}$$

$\pi_1(M)$ - инвариантной функции $K(y)$, удовлетворяющей условию (2.9), на аффинную функцию $F(y)$ [т. е. на функцию, являющуюся аффинным отображением из $(\widetilde M, \widetilde\nabla)$ в (A, Π_{right})], удовлетворяющую дополнительному условию:

$$F(y\cdot\gamma) = F(y)F(\gamma) \quad ; \quad y\in\widetilde M,\ \gamma\in\pi_1(M). \tag{2.14}$$

Заметим, что из (2.14) уже вытекает, так как $\widetilde{pt}\cdot\gamma = \gamma$,

$$F(\widetilde{pt}) = 1 \tag{2.15}$$

и можно писать $F\in \widehat{Aff}(\widetilde M,\widetilde\nabla; A,\Pi_{right})$ [см. обозначение предложения 2.5.2].

Сформулируем теперь основную теорему о приводимых формах.

Теорема 2.1. Пусть $\alpha\in\mathcal L^1(M,\mathfrak a)$. Следующие три утверждения эквивалентны:

(i) - α приводима к постоянной;

(ii) - для фундаментального решения Φ_α имеется представление Флоке (2.13);

(iii) - гомоморфизм монодромии $\alpha^\#:\pi_1(M)\to A$ продолжается с орбиты $\widetilde{pt}\cdot\pi_1(M)$ до аффинного отображения $F\in\widehat{Aff}(\widetilde M,\widetilde\nabla; A,\Pi_{right})$.

Доказательство. Импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii) мы уже установили перед тем, как давать определение представления Флоке. Легко доказать импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii). Действительно, если имеет место представление Флоке (2.13), то аффинная функция $F\in\widehat{Aff}$, входящая в правую часть (2.13), продолжает гомоморфизм монодромии $\alpha^\#$:

$$F\big|_{\widetilde{pt}\cdot\pi_1(M)} = \alpha^\#. \tag{2.16}$$

В самом деле,

$$F(\widetilde{pt}\cdot\gamma) = K^{-1}(\widetilde{pt}\cdot\gamma)\,\Phi_\alpha(\widetilde{pt}\cdot\gamma) = K^{-1}(\widetilde{pt})\,\alpha^\#(\gamma) = \alpha^\#(\gamma).$$

Заметим, кроме того, что (2.14) и (2.16) в совокупности эквивалентны равенству

$$F(y\cdot\gamma) = F(y)\,\alpha^\#(\gamma) \quad ; \quad y\in\widetilde M,\ \gamma\in\pi_1(M). \tag{2.17}$$

Докажем, наконец, импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $\beta^\#$ продолжается до аффинного отображения $F\in\widehat{Aff}(\widetilde M,\widetilde\nabla; A,\Pi_{right})$. По теореме 2.6.1 F является фундаментальным решением некоторой постоянной формы, которую мы обозначим, чтобы не было расхождений с (2.11), β_1, т. е.

$$F(y) = \Phi_{\beta_1}(y) \ ; \ \beta_1\in\mathcal L^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak a) \ ; \ y\in\widetilde M. \tag{2.18}$$

Из (2.18) и (2.17) следует, что

$$\beta_1^\# = \alpha^\#, \tag{2.19}$$

а из (2.19) вытекает, в силу теоремы 3.2.1, что формы β_1 и α эквивалентны, т. е. $\alpha\in\mathcal L^1_{red}(M,\nabla;\mathfrak a)$. Теорема доказана.

Пример 2.1. Пусть $M=G/\Gamma$ - однородное пространство из примера 2.3.2 (см. также предложение 2.5.3). Теорема 2.1 [в ее части (i) $\Leftrightarrow$ (iii)] принимает в рассматриваемом примере следующий вид (см. [38]):

Теорема 2.2. Вполне интегрируемая форма α на однородном пространстве $M=G/\Gamma$ приводима к постоянным коэффициентам тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^\#:\Gamma\to A$ продолжается до некоторого гомоморфизма групп Ли $G\to A$.

Из теоремы 2.2 вытекают, в частности, результаты для $M=\mathbb T^1$ и $M=\mathbb T^m$, полученные в § 1 (см. замечания 1.2 и 1.3). Однако метод доказательства теоремы 2.1, примененный нами в данном параграфе, несколько отличается от метода § 1. Дело в том, что метод § 1, основанный на логарифмируемости гомоморфизма монодромии, в общем случае не приводит к окончательному результату. Тем не менее мы попытаемся продвинуться, сколько возможно, и в этом направлении.

Форма $\alpha\in\mathcal L^1(M,\mathfrak a)$ будет приводима, если [см. (3.2.23)] уравнение на $\widetilde M$

$$DK + (\mathrm{Ad}\,K)\widetilde\alpha = \widetilde\beta. \tag{2.21}$$

с двумя неизвестными $K\in\mathcal F_A(\widetilde M)$ и $\beta\in\mathcal L^1(M,\mathfrak a)$ имеет решение (K,β), такое, что K - $\pi_1(M)$ - инвариантно, т. е.

$$K(y\cdot\gamma) = K(y) \quad ; \; y\in\widetilde{M}\,,\; \gamma\in\pi_1(M)\,, \qquad (2.22)$$

а форма $\beta\in\mathcal{L}^1_{const}(M,\nabla;\mathfrak{a})$.

Согласно лемме 3.2.2 общее решение (относительно K) уравнения (2.2I) имеет вид

$$K(y) = \Phi_\beta(y)K_0\Phi_\alpha^{-1}(y) \; ; \; y\in\widetilde{M}\,, \qquad (2.23)$$

и, согласно следствию 3.2.2, это решение будет $\pi_1(M)$-инвариантно тогда и только тогда, когда

$$K_0^{-1}\beta^{\#}(\gamma)K_0 = \alpha^{\#}(\gamma) \; ; \; \gamma\in\pi_1(M). \qquad (2.24)$$

Предположим теперь, что отображение

$$\widetilde{Exp}_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \qquad (2.25)$$

сюръективно. (В примерах § I это автоматически выполнено, ибо $\widetilde{Exp}_0 = id : T_0\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$). Тогда, в силу предложения 2.6.I, гомоморфизм монодромии $\beta^{\#}$ логарифмируем, т. е. существует отображение

$$\beta^{b} : \pi_1(M) \longrightarrow \mathfrak{a}, \qquad (2.26)$$

такое, что

$$\beta^{\#}(\gamma) = \exp\beta^{b}(\gamma) \quad ; \; \gamma\in\pi_1(M). \qquad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в (2.24) и используя свойство экспоненциального отображения групп Ли: $a(\exp\xi)a^{-1} = \exp((Ad\,a)\xi)$, $\xi\in\mathfrak{a}$, $a\in A$, получаем

$$\exp((Ad\,K_0^{-1})\beta^{b}(\gamma)) = \alpha^{\#}(\gamma) \; ; \; \gamma\in\pi_1(M), \qquad (2.28)$$

откуда выводим

<u>Предложение 2.I.</u> В предположении сюръективности отображения (2.25) гомоморфизм монодромии любой приводимой вполне интегрируемой формы логарифмируем, т. е. существует отображение (2.26), удовлетворяющее (2.27).

Однако доказать достаточность условия логарифмируемости $\alpha^{\#}$ для того, чтобы форма α была приводимой, теперь уже не удается. В самом деле, даже если мы как-то решим (2.28) относительно неизвестных K_0 и $\beta^{b}(\gamma)$, то тем самым мы сможем (согласно (2.6.I0)) восстановить значения искомой постоянной формы β лишь на некоторых векторах $Y_\gamma\in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}$ (таких, что $\widetilde{Exp}_{\tilde{p}}Y_\gamma = \gamma$), и не ясно, во-первых, можно ли построить такое <u>линейное</u> отображение $\beta_0\in L(T_{\tilde{p}}\widetilde{M},\mathfrak{a})$, что

$$\beta_0(Y_\gamma) = \beta^{b}(\gamma) \quad ; \; \gamma\in\pi_1(M)\,, \qquad (2.29)$$

а, тем более, во-вторых, можно ли добиться того, чтобы это отоб-

ражение β_0 попадало в множество $\mathcal{L}_{inv}(T_{\tilde{p}}\widetilde{M},\mathfrak{a})$, что обеспечивает [см. (2.3.24)] продолжимость β_0 до постоянной вполне интегрируемой формы на $\widetilde{M}$, опускаемой на M.

§ 3. <u>Распространяющие подгруппы фундаментальной группы. Приводимость на накрывающем многообразии</u>

В предыдущем параграфе мы выяснили, что вполне интегрируемая форма α приводима в том и только том случае, когда ее гомоморфизм монодромии $\alpha^{\#}$ продолжается до удовлетворяющего условию (2.I7) аффинного отображения F накрывающего многообразия $\widetilde{M}$ в группу Ли A. Такая продолжимость имеет место, разумеется, не всегда. Рассмотрим, в частности, обещанный в § I пример л.д.у. (I.I) на окружности с вещественными коэффициентами ($A=GL(n,\mathbb{R})$, $M=\mathbb{T}^1$). В этом случае (см. теоремы I.I и I.I′) продолжимость до аффинного отображения (т. е. до гомоморфизма групп) эквивалентна существованию логарифма у матрицы монодромии $\alpha^{\#}(1)$. В § I уже отмечалось, что вещественная матрица имеет вещественный логарифм не всегда, а лишь тогда, когда ее спектр не пересекается с $\mathbb{R}_-$. Поэтому не любое уравнение с периодическими (периода I) вещественными коэффициентами приводимо к постоянным коэффициентам периодической (периода I) вещественной заменой.

Однако нетрудно видеть, что спектр $\alpha^{\#}(2)$ уже не пересекается с $\mathbb{R}_-$ и матрица $\alpha^{\#}(2)=(\alpha^{\#}(1))^2$ уже всегда имеет вещественный логарифм $\alpha^{b}(2)$. Можно произвести замену с матрицей

$$Q(t) = \exp t\alpha^{b}(2)\cdot\Phi_\alpha^{-1}(t) \quad ; \; t\in\mathbb{R}\,, \qquad (3.1)$$

которая, очевидно, периодична, но с удвоенным периодом:

$$Q(t+2) = Q(t) \; ; \; t\in\mathbb{R}\,. \qquad (3.2)$$

В результате 2-периодической замены (I,2) уравнение (I.I) перейдет в уравнение (I.3) с постоянной матрицей

$$\beta = \alpha^{b}(2)\,. \qquad (3.3)$$

Полученный результат можно интерпретировать следующим образом: всякое уравнение (I.I) с вещественными коэффициентами на окружности можно привести к постоянным коэффициентам на двулистном накрытии окружности. Стандартное двулистное накрытие окружности $\mathbb{T}^1$ представляет собой отображение одной окружности в другую:

$$p : \hat{\mathbb{T}}^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1\,, \qquad (3.4)$$

где $2\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$ - подгруппа четных чисел.

Подгруппа $2\mathbb{Z}$ обладает тем свойством, что любой гомоморфизм

$f: \mathbb{Z} \to GL(n, \mathbb{R})$, будучи суженным на $2\mathbb{Z}$, продолжается до гомоморфизма

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}), \tag{3.5}$$

т. е. существует такой гомоморфизм (3.5), что

$$F\big|_{2\mathbb{Z}} = f\big|_{2\mathbb{Z}}, \tag{3.6}$$

в то время, как с самой группы $\mathbb{Z}$ не всякий, как мы видели, гомоморфизм продолжается до гомоморфизма группы $\mathbb{R}$.

Группе $2\mathbb{Z}$ естественно присвоить название распространяющей подгруппы (термин принадлежит Горбацевичу[35]). Нетрудно установить, что распространяющими будут в данном примере все подгруппы вида $(2k)\mathbb{Z}$, где k – целое, и только они, причем группа $2\mathbb{Z}$ – самая большая из них.

Рассмотренный пример легко обобщается на случай вполне интегрируемых уравнений (I.22) с вещественными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^m$. Согласно теоремам I.2 и I.2$'$ уравнение (I.22) приводимо тогда и только тогда, когда гомоморфизм монодромии (I.34) продолжается до гомоморфизма (I.35) групп Ли. В случае вещественных коэффициентов такая продолжимость имеет место не всегда, однако всегда можно продолжить суженный гомоморфизм $\alpha^*\big|_{2\mathbb{Z}^m}$, т. е. уравнение (I.22) [или, эквивалентно, уравнение (I.2I)] с вещественными коэффициентами можно привести к постоянным коэффициентам, если его предварительно поднять до уравнения

$$D\Phi = p^*\alpha \tag{3.7}$$

на стандартном 2^m-листном накрытии тора тором:

$$p: \hat{\mathbb{T}}^m = \mathbb{R}^m/2\mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m = \mathbb{T}^m. \tag{3.8}$$

Группа $2\mathbb{Z}^m$ есть максимальная распространяющая подгруппа группы $\mathbb{Z}^m = \pi_1(\mathbb{T}^m)$, т. е. максимальная подгруппа в группе $\mathbb{Z}^m$, обладающая следующим свойством: всякий гомоморфизм $f: \mathbb{Z}^m \to GL(n, \mathbb{R})$, будучи суженным на $2\mathbb{Z}^m$, продолжается до гомоморфизма

$$F : \mathbb{R}^m \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \tag{3.9}$$

так, что

$$F\big|_{2\mathbb{Z}^m} = f\big|_{2\mathbb{Z}^m}. \tag{3.10}$$

Обратимся теперь к общей ситуации. Рассмотрим многообразие линейной связности (M, ∇).

Определение 3.I. Подгруппу $R \subset \pi_1(M)$ назовем распространяющей

подгруппой фундаментальной группы $\pi_1(M)$ относительно: I) связности ∇ на M; 2) группы Ли A, если всякий гомоморфизм $f: \pi_1(M) \to A$, будучи суженным на подгруппу R, продолжается до аффинного отображения $F \in \mathrm{Aff}(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_{right})$, такого, что

$$F(y \cdot \gamma) = F(y) f(\gamma)\ ;\ y \in \widetilde{M},\ \gamma \in R. \tag{3.11}$$

Очевидны следующие факты:

(i)-распространяющие подгруппы всегда существуют (тривиальная подгруппа $R = \{1\}$ является распространяющей, продолжением с нее мы получаем аффинное отображение $F = 1$);

(ii) – любая подгруппа распространяющей подгруппы сама является распространяющей подгруппой;

(iii) – подгруппа, сопряженная к распространяющей подгруппе, т. е. подгруппа вида $\gamma R \gamma^{-1}$, $\gamma \in \pi_1(M)$, также является распространяющей подгруппой.

Свойство (iii) позволяет говорить не о распространяющей подгруппе, а о распространяющем классе сопряженных подгрупп.

Но известно (см. § 0.3, п. 3), что классы сопряженных подгрупп фундаментальной группы $\pi_1(M)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентных связных накрывающих многообразий многообразия M.

Пусть

$$p_{(H)} : \hat{M}_{(H)} \longrightarrow M \tag{3.12}$$

есть накрытие, соответствующее [см. (0.3.10)] подгруппе $H \subset \pi_1(M)$. Согласно § 0.3, п. 3 $\widetilde{\hat{M}_{(H)}} = \widetilde{M}$ и $\pi_1(\hat{M}_{(H)}) = H$. Запишем для данного случая диаграмму (0.3.9):

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[dr, "p'_{(H)}"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & \hat{M}_{(H)} \arrow[dl, "p_{(H)}"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{3.13}$$

В силу того, что отображение (3.12) является накрывающим, связность ∇ на M можно поднять (методом, описанном в § 2.3) до некоторой связности $\hat{\nabla}_{(H)}$ на $\hat{M}_{(H)}$. При этом все отображения, входящие в диаграмму (3.13), будут аффинными. Далее, нетрудно доказать, что, если $\alpha \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{A})$, то $\hat{\alpha}_{(H)} = (p_{(H)})^* \alpha \in \mathcal{L}^1_{const}(\hat{M}_{(H)}, \hat{\nabla}_{(H)}; \mathfrak{A})$, а из коммутативности (3.13), очевидно, следует

$$\pi^*\alpha = (p'_{(H)})^* \hat{\alpha}_{(H)}. \tag{3.14}$$

Предложение 3.I. Пусть (M, ∇) – многообразие линейной связности; $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{A})$ и пусть $R \subset \pi_1(M)$ – распространяющая подгруппа. Тогда форма $\hat{\alpha}_{(R)} \in \mathcal{L}^1(\hat{M}_{(R)}, \mathfrak{a})$ приводима в смысле связности $\hat{\nabla}_{(R)}$, т. е.

$$\hat{\alpha}_{(R)} \in \mathcal{L}^1_{red}(\hat{M}_{(R)}, \hat{\nabla}_{(R)}; \mathfrak{a}). \tag{3.15}$$

<u>Доказательство</u>. Фундаментальным решением $\Phi_{\hat{\alpha}_{(R)}}$ на $\widetilde{\hat{M}}_{(R)} = \widetilde{M}$, оответствующим форме $\hat{\alpha}_{(R)}$, является в силу (3.14) фундаментальное решение Φ_α, соответствующее форме α:

$$\Phi_{\hat{\alpha}_{(R)}} = \Phi_\alpha . \tag{3.16}$$

Из (3.16) вытекает, что гомоморфизм монодромии $(\hat{\alpha}_{(R)})^{\#}$ формы $\hat{\alpha}_{(R)}$ есть не что иное, как сужение на R гомоморфизма монодромии $\alpha^{\#}$ формы α:

$$(\hat{\alpha}_{(R)})^{\#} = \alpha^{\#}|_R . \tag{3.17}$$

Из (3.17) и определения 3.1 распространяющей подгруппы следует, что существует $F \in Aff(\widetilde{M}, \widetilde{\nabla}; A, \Pi_{right})$ такое, что

$$F(y.r) = F(y)\alpha^{\#}(r) = F(y)(\hat{\alpha}_{(R)})^{\#}(r) \; ; \; y \in \widetilde{M}, \; r \in R , \tag{3.18}$$

откуда в силу теоремы 2.1 вытекает (3.15).

Понятно, что желательно найти накрытие, как можно более "близкое" к данному многообразию M (т. е. как можно "менее листное"). Для этого требуется отыскать <u>максимальную</u> распространяющую подгруппу R.

Авторам не известны общие условия, обеспечивающие существование максимальной распространяющей подгруппы, кроме следующего тривиального:

<u>Предложение 3.2</u>. Если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ обладает тем свойством, что любые возрастающие цепочки подгрупп обрываются, то любая распространяющая подгруппа группы $\pi_1(M)$ содержится в некоторой максимальной распространяющей.

Условия предложения 3.2 выполняются, например, для решеток в разрешимых группах Ли (решетка – это дискретная подгруппа, фактор по которой компактен), т. е. в ситуации, когда $M = G/\Gamma$ – однородное пространство односвязной разрешимой группы Ли G по решетке Γ (см. пример 2.3.1).

Но даже в этом частном случае может оказаться (см. пример в [35]), что максимальная распространяющая подгруппа имеет бесконечный индекс и, следовательно, соответствующее накрытие бесконечнолистно.

В случае, когда группа G нильпотентна, а группа A – линейная алгебраическая группа над полем $\mathbb{R}$, любая максимальная распространяющая подгруппа решетки Γ относительно группы Ли A

имеет конечный индекс, и число этих групп конечно ([35]). Существуют примеры, когда множество классов сопряженности максимальных распространяющих подгрупп решетки в нильпотентной (даже абелевой) группе Ли содержит более одного элемента (см. [35]).

§ 4. <u>Обобщенная теорема Еругина</u>

В § 2 нами получены условия приводимости вполне интегрируемого л. д. у. на многообразии линейной связности к постоянным коэффициентам. Сейчас мы исследуем вопрос о том, когда два вполне интегрируемых л. д. у. с постоянными коэффициентами приводимы друг к другу, т. е. выясним, когда две формы $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$ принадлежат одной орбите действия ρ.

Согласно теореме 3.2.1 две формы α, β эквивалентны тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии сопряжены, т. е. найдется элемент $Q_0 \in A$ такой, что

$$\beta^{\#}(\gamma) = Q_0 \alpha^{\#}(\gamma) Q_0^{-1} \quad ; \quad \gamma \in \pi_1(M). \tag{4.1}$$

С другой стороны, в силу того, что формы α, β постоянны, их гомоморфизмы монодромии логарифмируемы, правда, при дополнительном ограничении (см. § 2.6): отображение

$$\widetilde{Exp}_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \tag{4.2}$$

должно быть сюръективным или, по крайней мере, накрывать орбиту $\tilde{p}.\pi_1(M)$, и тогда

$$\alpha^{\#}(\gamma) = \Phi_\alpha(\gamma) = \Phi_\alpha(\widetilde{Exp}_{\tilde{p}} Y_\gamma) = \exp(\Phi_\alpha)_{*,\tilde{p}} Y_\gamma = \exp\langle \tilde{\alpha}_0, Y_\gamma \rangle, \tag{4.3}$$

где $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}(\tilde{p})$. Аналогичную формулу можно написать для формы β.

Тогда условие (4.1) можно переписать в виде

$$\exp\langle \tilde{\beta}_0, Y_\gamma \rangle = Q_0 \exp\langle \tilde{\alpha}_0 ; Y_\gamma \rangle Q_0^{-1}, \tag{4.4}$$

причем если группа $\pi_1(M)$ имеет конечное число образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, то достаточно записать (4.4) на этих образующих.

Мы доказали, таким образом,

<u>Предложение 4.1</u>. Пусть многообразие (M , ∇) удовлетворяет следующим условиям: (i) – фундаментальная группа $\pi_1(M)$ имеет конечное число образующих; (ii) – образ экспоненциального отображения $\widetilde{Exp}_{\tilde{p}}$ накрывающей связности содержит орбиту $\tilde{p}.\pi_1(M)$ точки $\tilde{p}$. Тогда две постоянные вполне интегрируемые формы $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$ тогда и только тогда эквивалентны, когда найдется элемент $Q_0 \in A$, такой, что

$$\exp\langle \tilde{\beta}_0, Y_{\gamma_i} \rangle = Q_0 \exp\langle \tilde{\alpha}_0, Y_{\gamma_i} \rangle Q_0^{-1} \; ; \; i = 1, \dots, s , \tag{4.5}$$

где $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}(\tilde{p})$; $\tilde{\beta}_0 = \tilde{\beta}(\tilde{p})$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ – образующие группы $\pi_1(M)$; Y_{γ_i} – произвольный элемент $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ такой, что $\widetilde{Exp}_{\tilde{p}} Y_{\gamma_i} = \gamma_i$.

<u>Замечание 4.I</u>. Вектор $Y_{\gamma_i} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ есть касательный вектор к геодезической $\tilde{\psi}_{Y_{\gamma_i}}(t) = \widetilde{Exp}_{\tilde{p}} tY_{\gamma_i}$, начинающейся в точке $\tilde{p}$ и приходящий при $t = 1$ в точку γ_i. При отождествлении $\pi_{*,\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to T_p M$ вектор $X_{\gamma_i} = \pi_{*,\tilde{p}} Y_{\gamma_i} \in T_p M$ есть касательный вектор к замкнутой геодезической $\psi_{X_{\gamma_i}}(t) = (\pi \circ \tilde{\psi}_{Y_{\gamma_i}})(t) = Exp_p\, tX_{\gamma_i}$, содержащейся в гомотопическом классе $\gamma_i \in \pi_1(M)$. Очевидно,

$$\langle \tilde{\alpha}_0, Y_{\gamma_i} \rangle = \langle \alpha_0, X_{\gamma_i} \rangle; \; \langle \tilde{\beta}_0, Y_{\gamma_i} \rangle = \langle \beta_0, X_{\gamma_i} \rangle.$$

Предположим теперь дополнительно к требованиям предложения 4.I, что кручение обращается в нуль: $Tor = 0$. Тогда [см. (2.2.21)] все элементы $\langle \alpha_0, X_{\gamma_i} \rangle$, $i = 1, \ldots, s$ (а также $\langle \beta_0, X_{\gamma_i} \rangle$, $i = 1, \ldots, s$) попарно коммутируют, и поэтому из (4.5) следует, что для любого вектора $X \in T_p M$ из линейной оболочки $\ell.h.(X_{\gamma_1}, \ldots, X_{\gamma_s})$ выполнено равенство

$$exp \langle \beta_0, X \rangle = Q_0\, exp \langle \alpha_0, X \rangle Q_0^{-1}. \tag{4.6}$$

Введем в рассмотрение подпространство

$$T^{CG}_{\tilde{p}}(\tilde{M}) = \ell.h.\{ \widetilde{Exp}^{-1}_{\tilde{p}} (\tilde{p}.\pi_1(M)) \} \subset T_{\tilde{p}}\tilde{M} \tag{4.7}$$

линейную оболочку прообраза орбиты точки $\tilde{p}$. Обозначение "CG" есть аббревиатура от "*closed geodesics*". Это объясняется тем, что при отождествлении $\pi_{*,\tilde{p}}$ соответствующее пространство $T^{CG}_{p}(M) = \pi_{*,\tilde{p}}(T^{CG}_{\tilde{p}}(\tilde{M}))$ есть линейная оболочка множества векторов, которые порождают замкнутые геодезические в M.

Таким образом, (4.6) должно выполняться для $X \in T^{CG}_p(M)$. В пространстве $T^{CG}_p(M)$ можно выбрать базис $X_1, \ldots, X_r$, и из попарного коммутирования элементов $\{\langle \alpha_0, X_i \rangle\}_{i=1}^{r}$ и $\{\langle \beta_0, X_i \rangle\}_{i=1}^{r}$ вытекает, что достаточно требовать выполнения (4.6) на векторах базиса $\{X_i\}_{i=1}^{r}$ пространства $T^{CG}_p(M)$. Подчеркнем, что сами векторы базиса $\{X_i\}_{i=1}^{r}$ не обязаны порождать замкнутых геодезических.

Можем сформулировать

<u>Предложение 4.2</u>. Пусть многообразие (M, ∇) удовлетворяет, помимо условий (i), (ii) предложения 4.I, условию (iii): $Tor = 0$. Тогда две формы $\alpha, \beta \in \mathcal{L}^1_{const}(M, \nabla; \mathfrak{a})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется элемент $Q_0 \in A$, такой, что

$$exp \langle \beta_0, X_i \rangle = Q_0\, exp \langle \alpha_0, X_i \rangle Q_0^{-1}; \; i = 1, \ldots, r, \tag{4.8}$$

где $\{X_i\}_{i=1}^{r}$ – произвольный базис пространства $T^{CG}_p(M)$.

<u>Замечание 4.2</u>. Все три условия (i), (ii), (iii) выполнены, если M –полное риманово многообразие со связностью Леви-Чевита (см. § 0.4, п. II).

Рассмотрим теперь пример уравнений на окружности ($M = T^1$). В этом случае $r = 1$ и (4.8) превратится в условие подобия элементов $exp\, \beta_0, exp\, \alpha_0 \in A$:

$$exp\, \beta_0 = Q_0 \cdot exp\, \alpha_0 \cdot Q_0^{-1}. \tag{4.9}$$

Ограничимся случаем линейной группы Ли A, тогда (4.9) есть подобие матриц, необходимым условием чего является совпадение спектров:

$$spectre\,(exp\, \beta_0) = spectre\,(exp\, \alpha_0). \tag{4.10}$$

Равенство (4.10) имеет символический характер, и его надо понимать не только как совпадение собственных значений, но и как совпадение элементарных делителей.

Пусть

$$(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k} \tag{4.11}$$

есть элементарные делители матрицы α_0, а

$$(\lambda - \mu_1)^{\varkappa_1}, \ldots, (\lambda - \mu_\ell)^{\varkappa_\ell} \tag{4.12}$$

есть элементарные делители β_0.

Тогда элементарные делители матриц $exp\, \alpha_0$ и $exp\, \beta_0$ будут следующими (см. [7]):

$$(\lambda - e^{\lambda_1})^{\nu_1}, \ldots, (\lambda - e^{\lambda_k})^{\nu_k}; \tag{4.13}$$

$$(\lambda - e^{\mu_1})^{\varkappa_1}, \ldots, (\lambda - e^{\mu_\ell})^{\varkappa_\ell}, \tag{4.14}$$

и в силу подобия (4.9) мы должны иметь: I) $k = \ell$; 2) $\nu_1 = \varkappa_1, \ldots, \nu_k = \varkappa_k$; 3) $e^{\lambda_1} = e^{\mu_1}, \ldots, e^{\lambda_k} = e^{\mu_k}$.

Запишем еще одно символическое равенство, аналогичное (4.10):

$$exp\; spectre\; \alpha_0 = exp\; spectre\; \beta_0, \tag{4.15}$$

которое надо понимать следующим образом: элементарные делители матриц α_0, β_0 имеют, соответственно, вид:

$$(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}; \tag{4.16}$$

$$(\lambda - \mu_1)^{\nu_1}, \ldots, (\lambda - \mu_k)^{\nu_k}, \tag{4.17}$$

и справедливо равенство

$$e^{\lambda_i} = e^{\mu_i} \quad ; \; i=1,\dots,k. \tag{4.18}$$

Условившись таким образом, можем сформулировать

Предложение 4.3. Два л. д. у.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \alpha_0 \Phi \tag{4.19}$$

и

$$\frac{d\Psi}{dt} = \beta_0 \Psi \tag{4.20}$$

с постоянными коэффициентами эквивалентны на окружности (т. е. приводятся одно к другому периодической заменой) тогда и только тогда, когда справедливо (4.15).

Замечание 4.3. Сравним полученный результат с известной теоремой Н.Б.Еругина (см., например, [7]). Если рассматривать эквивалентность обыкновенных л. д. у. (4.19) и (4.20) не в смысле периодических, а в смысле ляпуновских, замен, то вместо (4.15) получится условие

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{spectre}\ \alpha_0 = \mathrm{Re}\ \mathrm{spectre}\ \beta_0 , \tag{4.21}$$

которое надо понимать в аналогичном смысле: элементарные делители матриц α_0 , β_0 имеют вид (4.16), (4.17) соответственно, а вместо условия (4.18) (которое эквивалентно тому, что $\mathrm{Re}\,\lambda_i = \mathrm{Re}\,\mu_i$ и мнимые части $\mathrm{Im}\,\lambda_i$, $\mathrm{Im}\,\mu_i$ отличаются на целые кратные 2π) будет более слабое условие

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i = \mathrm{Re}\,\mu_i \quad ; \; i=1,\dots,k. \tag{4.22}$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Учебники и монографии

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971.
2. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.
3. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. М., 1967.
4. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия (сводка результатов). М., 1975.
5. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (гл. I-III). М., 1975.
6. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1966.
8. Годбийон Н. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М., 1973.
9. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М., 1971.
10. Еругин Н.П. Приводимые системы. - Труды мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1946, т. 13.
11. Еругин Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963.
12. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
13. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
14. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. М., 1975.

15. Картан А. Дифференциальное исчисление, дифференциальные формы. М., 1971.
16. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., 1972.
17. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
18. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М., 1967.
19. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. М., 1960.
20. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., 1972.
21. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М., 1971.
22. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М., 1960.
23. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.
24. Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. М., 1977.
25. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М., 1977.
26. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М., 1968.
27. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970.
28. Стинрод Н. Топология косых произведений. М., 1953.
29. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970.
30. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964.
31. Хирцебрух Ф. Новые методы в алгебраической геометрии. М., 1973.
32. Шевалле К. Теория групп Ли. М., 1948, т. I.
33. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.
34. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. N.Y. - London. 1963, Vol. 1; 1969, Vol. 2.

II. Журнальные статьи

35. Горбацевич В.В. Обобщенная теория Ляпунова на многообразиях Мальцева. - Мат. сб., 1974, т. 94.
36. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях.

зиях. Препринт. (Школа по теории операторов в функциональных пространствах - 25-31. VIII. 1975). Новосибирск, 1975.
37. Онищик А.Л. Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий. - Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, т. 17.
38. Онищик А.Л. О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах. - Мат. заметки, 1977, т. 9, № 4.
39. Перов А.И., Задорожный В.Г. О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. - Изв. вузов. Математика, 1970, № 5.
40. Яцкин Н.И. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами на многообразиях линейной связности. - Мат. заметки, 1976, т. 19, № 5.
41. Яцкин Н.И. Обобщенная теорема Ляпунова-Флоке и аффинные отображения.- Укр. мат. журн., 1979, № 5.

ИБ № 514

Селим Григорьевич Крейн

Николай Иванович Яцкин

ЛИНЕЙНЫЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

УРАВНЕНИЯ

НА МНОГООБРАЗИЯХ

Редактор В.В. Пушкаренко
Художник А.Г. Лось
Корректор Н.В. Плахина

ЛЕ 03299. Подп.в печ. II.03.80.

Форм.бум. 60x84/I6. Бумага типографская № 3.

Усл.п.л. 7,67. Уч.-изд.л. 7,3. Тираж 500. Заказ 8ID.

Цена I р.IO к.

Издательство Воронежского университета
Воронеж, ул. Ф.Энгельса,8
Ротапринт типографии издательства ВГУ
Воронеж, ул. Пушкинская,3